

Probabilidade I

Departamento de Estatística

Universidade Federal da Paraíba

Probabilidade

Probabilidade

As definições de probabilidade apresentadas anteriormente podem ser utilizadas para resolver inúmeros problemas. Contudo, elas não são suficientes para uma formulação matemática mais rigorosa de probabilidade.

Uma abordagem axiomática foi apresentada por Kolmogorov para definir probabilidade como uma função de conjuntos em que os elementos do domínio são conjuntos e os elementos da imagem são números reais entre zero e um.

Observação 5.1: Os axiomas matemáticos apresentados por Kolmogorov para definir probabilidade permitem incluir as definições anteriores como casos particulares.

Probabilidade

Definição 5.1: (Probabilidade) Uma função P , definida na σ -álgebra $\mathcal{A}$ de subconjuntos de Ω é uma probabilidade se satisfaz os axiomas de Kolmogorov:

AXIOMA 1 Para todo subconjunto $A \in \mathcal{A}$, $P(A) \geq 0$;

AXIOMA 2 $P(\Omega) = 1$

AXIOMA 3 Para toda sequência enumerável $(A_1, A_2, \dots \in \mathcal{A})$ de elementos mutuamente exclusivos, temos (P é σ -aditiva)

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

Observação 5.2: O trio $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, sendo Ω um conjunto não-vazio, $\mathcal{A}$ uma σ -álgebra de subconjuntos de Ω e P uma probabilidade em $\mathcal{A}$, é denominada espaço de probabilidade.

Probabilidade

Propriedades de Probabilidade: Dado $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, suponha que todos os conjuntos mencionados a seguir são eventos nesse espaço de probabilidade. Então as seguintes propriedades são consequências dos axiomas:

P1 $P(A^c) = 1 - P(A)$ ($P(\emptyset) = 0$);

P2 Se $A \subset B$, então $P(A) \leq P(B)$;

P3 $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ (generalizável para qualquer n);

P4 $P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$;

P5 Para todo $A \in \mathcal{A}$, tem-se que $0 \leq P(A) \leq 1$;

P6 $P(B) = P(B \cap A) + P(B \cap A^c)$;

P7 $P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$;

Probabilidade

DEMONSTRAÇÃO:

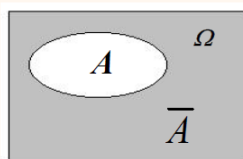
Probabilidade

DEMONSTRAÇÃO:

Ilustrando Algumas Propriedades

- $P(\emptyset) = 0$
- $P(\Omega) = 1$
- Probabilidade do evento complementar

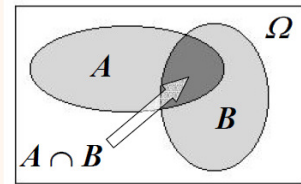
$$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$$



Ilustrando Algumas Propriedades

- Regra da soma das probabilidades

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$



Se A e B mutuamente exclusivos,
então:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

Exemplo 1 - Probabilidade

Um critério bastante aceito para definir hipertensão arterial na população consiste em considerar um indivíduo como hipertenso se ele apresentar:

- pressão arterial sistólica maior do que 140 (mmHg);
- pressão arterial diastólica maior do que 90 (mmHg);
- ou ambas.

Definindo $A = PAS > 140$ (mmHg); $B = PAD > 90$ (mmHg) e considerando $P(A) = 0,15$; $P(B) = 0,1$ e $P(A \cap B) = 0,08$; então, a probabilidade de um indivíduo ser hipertenso seria:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$P(A \cup B) = \text{[redacted]}$$

$$P(A \cup B) = \text{[redacted]}$$

Exemplo 1 - Probabilidade

Graficamente:

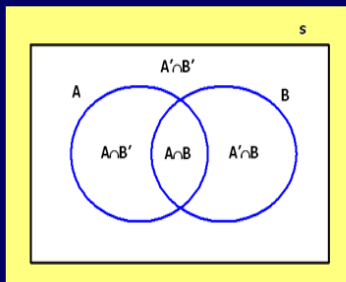


Fig. 5.8a

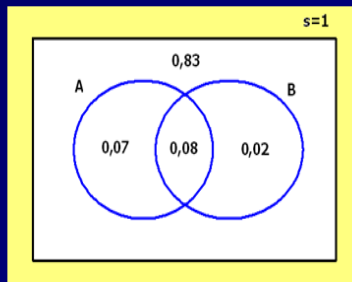


Fig. 5.8b

Probabilidade

Observação 5.3: Para o espaço mensurável $(\Omega, \mathcal{P})$ foi definida uma probabilidade para todo $\omega \in \Omega$. neste caso, a probabilidade de qualquer outro evento A é dada por

$$P(A) = \sum_{\omega \in \Omega: \omega \in A} P(\omega)$$

Observação 5.4 (Espaço Amostral Finito): Considerando a situação em que Ω é formado por um número finito de elementos e $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_k\}$, a cada evento simples $\{\omega_i\}$ associaremos um número p_i (probabilidade), que satisfaça as seguintes condições:

- (i) $p_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, k$;
- (ii) $p_1 + p_2 + \dots + p_k = 1$.

Observação 5.5 (Resultados Igualmente Prováveis): No caso em que todos os resultados são igualmente verossímeis, para $i = 1, \dots, k$, temos que

$$p = \frac{1}{k}$$

Exemplo 2

-
- Três cavalos, A, B e C, estão numa corrida; A é duas vezes mais provável de ganhar que B e B é duas vezes mais do que C. Quais são as probabilidades de vitória de cada um, isto é, $P(A)$, $P(B)$ e $P(C)$? Qual é a probabilidade de que B ou C ganhe?

Exemplo 2

Probabilidade

EXEMPLO 3: Sejam A e B eventos mutuamente exclusivos. Seja $P(A) = 0.20$ e $P(B) = 0.30$. Calcule as probabilidades:

- 1 $P(A^c)$
- 2 $P(B^c)$
- 3 $P(A \cup B)$
- 4 $P(A \cap B)$
- 5 $P(A^c \cap B^c)$

EXEMPLO 4: Suponha agora que A e B não sejam mutuamente exclusivos. Adicionalmente temos que $P(A \cap B) = 0.10$. Calcule as mesmas probabilidades anteriores:

Exemplo 3

Probabilidade

EXEMPLO 5: Na UFPB, 75% dos alunos praticam algum esporte, 20% gostam de sushi e 40% gostam de música. Adicionalmente, suponha que 15% corram e gostem de sushi, 30% corram e gostem de música, 10% gostam de sushi e música e 5% gostem das três atividades.

- 1 Qual a probabilidade de uma pessoa selecionada aleatoriamente, estar engajada em pelo menos uma das três atividades.
- 2 Qual a probabilidade de um morador gostar de exatamente um tipo de atividade.

Exemplo 5

Tabela de contingência

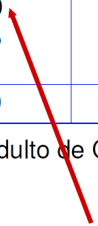
Revela a existência de eventos combinados, e facilita o tratamento probabilístico de tais eventos.

É uma tabela que disponibiliza informações diretamente nas linhas e colunas, e que além dessas informações é possível visualizar também o número de casos comuns às interseções de eventos.

Exemplo 6 - Probabilidade

Perguntou-se a uma amostra de adultos em três cidades se eles gostavam de um novo suco. Os resultados estão a seguir.

	J. Pessoa	Recife	C. Grande	Total
Sim	100	150	150	400
Não	125	130	95	350
Não sabe	75	170	5	250
Total	300	450	250	1.000



Determine a probabilidade de sortear um adulto de C. Grande ou que tenha respondido SIM

$$\begin{aligned}P(\text{C. Grande} \cup \text{SIM}) &= 250/1.000 + 400/1.000 - 150/1.000 \\ &= 500/1.000 = 0,5\end{aligned}$$

Exercício 1

Perguntou-se a uma amostra de adultos formados em engenharia, em três capitais, se eles atuavam na área. Os resultados estão a seguir.

	João Pessoa	Recife	Natal	Total
Sim	160	220	180	560
Não	135	80	95	310
Total	295	300	275	870

Um adulto é selecionada ao acaso. Determine:

1. $P(\text{Natal} \cup \text{Sim})$
2. $P(\text{Recife} \cap \text{Não})$
3. $P(\text{João Pessoa})$

Probabilidade

Exercício 2: Dois processadores tipos A e B são colocados em teste por 50 mil horas. A probabilidade de que um erro de cálculo aconteça em um processador do tipo A é de $1/30$, no tipo B , $1/80$ e, em ambos, $1/1000$. Qual a probabilidade de que:

- 1 Pelo menos um dos processadores tenha apresentado erro?
- 2 Nenhum processador tenha apresentado erro?
- 3 Apenas o processador A tenha apresentado erro?

Probabilidade

Exercício 3: Uma moeda é viciada de forma que a probabilidade de sair cara é 4 vezes maior que a de sair coroa. Para dois lançamentos independentes dessa moeda, determinar:

- 1 O espaço amostral.
- 2 A probabilidade de sair somente uma cara.
- 3 A probabilidade de sair pelo menos uma cara.
- 4 A probabilidade de dois resultados iguais.

Probabilidade

Exercício 3: