Variáveis Aleatórias

Esperança e Variância

Prof. Luiz Medeiros
Departamento de Estatística - UFPB

ESPERANÇA E VARIÂNCIA

- Nos modelos matemáticos aleatórios parâmetros podem ser empregados para caracterizar a distribuição de probabilidade.
- Logo, a cada distribuição de probabilidade podemos associar certos parâmetros os quais fornecem informações sobre a distribuição.

MÉDIA (Esperança)

VARIÂNCIA

- **<u>OBJETIVO:</u>** Definir medidas para as variáveis aleatórias que sintetizem características relevantes de uma distribuição de probabilidade.

ESPERANÇA (VALOR MÉDIO)

- **DEFINIÇÃO:** Dada uma Variável aleatória discreta X, assumindo os valores $x_1, x_2, \ldots, x_n$, o valor esperado, a esperança matemática de X, denotado por *E(X)* é definida por

$$E(X) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i p(x_i),$$

se $\sum x_i . p(x_i) < \infty$ (se a série convergir)

- **NOTAÇÃO**: $E(X) = \mu$

Exemplo 1

- Considere a variável aleatória discreta X:

x_i	0	1	2
$p(x_i)$	1/4	1/2	1/4

Temos que,

$$E(X) = \sum_{i=1}^{3} x_i p(x_i) = \left(0.\frac{1}{4}\right) + \left(1.\frac{1}{2}\right) + \left(2.\frac{1}{4}\right) = 1$$

ESPERANÇA (VALOR MÉDIO)

- **<u>DEFINIÇÃO:</u>** Seja X uma variável aleatória contínua com fdp *f(x)*. O *valor* esperado ou esperança matemática de X é definido como

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx$$

se, e somente se, $\int_{-\infty}^{+\infty} |x| f(x) dx < \infty$.

- **<u>NOTAÇÃO</u>**: $E(X) = \mu$

Exemplo 2

- Considere a seguinte fdp;

$$f(x) = \begin{cases} 2x, & 0 < x < 1, \\ 0, & \textit{para quaisquer outros valores} \end{cases}$$

Temos que,

$$E(X) = \int_0^1 (x \times 2x)dx = \int_0^1 (2x^2)dx = \frac{2}{3}$$

Propriedades da Esperança

1. A média de uma constante é a própria constante.

$$E(K) = K.$$

2. Multiplicando-se uma variável aleatória X por uma constante, sua média fica multiplicada por essa constante.

$$E(KX) = KE(X)$$

3. A média da soma ou da diferença de duas variáveis aleatórias é, respectivamente, a soma ou diferença das médias.

$$E(X \pm Y) = E(X) \pm E(Y)$$

Observação: Note que toda função de uma variável aleatória X é também uma variável aleatória. Podemos, portanto, falar na esperança de X^2, $2X+1$, dentre outras. Por exemplo:

$$E(X^2) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i^2 p(x_i)$$ ou $$E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x^2 f(x))dx$$

VARIÂNCIA

- **DEFINIÇÃO:** Seja X uma variável aleatória com esperança dada por E(X). A variância de X é definida por

$$Var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$$

OBSERVAÇÃO: A variância nos dá a dispersão dos valores da variável em relação ao valor esperado.

- **NOTAÇÃO**: $Var(X) = \sigma^2$

Notamos que se uma variável aleatória é medida em certa unidade, a variância dessa variável é expressa no quadrado dessa unidade. Para fins de comparação e facilidade de interpretação introduz-se o conceito do desvio padrão da variável aleatória, denotado por $\sigma(X)$, que é definido como a raiz quadrada positiva da variância, isto é, $\sigma(X) = \sqrt{\sigma^2(X)}$.

Exemplo 3

- Considere a variável aleatória discreta X:

x_i	0	1	2
$p(x_i)$	1/4	1/2	1/4

Calcule a Var(X)

$$E(X) = \sum_{i=1}^{3} x_i p(x_i) = \left(0.\frac{1}{4}\right) + \left(1.\frac{1}{2}\right) + \left(2.\frac{1}{4}\right) = 1,$$

$$E(X^2) = \sum_{i=1}^{3} x_i^2 p(x_i) = \left(0^2.\frac{1}{4}\right) + \left(1^2.\frac{1}{2}\right) + \left(2^2.\frac{1}{4}\right) = \frac{3}{2},$$

$$Var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = \frac{3}{2} - (1)^2 = \frac{3}{2} - 1 = \frac{3-2}{2} = \frac{1}{2}$$

Exemplo 4

- Considere a seguinte fdp;

$$f(x) = \begin{cases} 2x, \ 0 < x < 1, \\ 0, \cdot \ para\ quaisquer\ outros\ valores \end{cases}$$

Calcule Var(X),

$$E(X) = \int_0^1 (x \times 2x)dx = \int_0^1 (2x^2)dx = \frac{2}{3}$$

$$E(X^2) = \int_0^1 (x^2 \times 2x)dx = \int_0^1 (2x^3)dx = \frac{1}{2}$$

$$Var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = \frac{1}{2} - \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{1}{2} - \frac{4}{9} = \frac{9-8}{18} = \frac{1}{18}$$

Propriedades da Variância

1. A variância de uma constante é zero. $V(K)=0$
2. Multiplicando-se uma variável aleatória por uma constante sua variância fica multiplicada pelo quadrado da constante.
$$V(KX)=K^2V(X)$$
3. Somando-se ou subtraindo-se uma constante à variável aleatória, sua variância não se altera.
$$V(K\pm X)=V(X)$$
4. A variância da soma ou da diferença de duas variáveis aleatórias é dada por:
$$V(X\pm Y)=V(X)+V(Y)\pm 2\times \operatorname{cov}(X,Y)$$

Onde $\operatorname{cov}(X,Y)=E\{[X-E(X)][Y-E(Y)]\}=E(XY)-E(X)E(Y)$

OBS.: Quando X e Y são variáveis aleatórias independentes, $E(XY)=E(X)E(Y)$, conseqüentemente, cov(*X,Y*)=0, logo $V(X\pm Y)=V(X)+V(Y)$

Exercícios

1) Considere a seguinte distribuição de probabilidade para o número de dias (X) que um livro fica emprestado, além da data de vencimento:

x	1	2	3	4	5
p(x)	0.4	0.2	0.2	0.1	0.1

a) Calcule o número esperado de dias de atraso.

b) Encontre a Função de Distribuição Acumulada.

c) Suponha que se o usuário atrasar a entrega em um prazo superior a $\mu + \sigma$ dias, onde $\mu = E(X)$ e σ = desvio padrão de X, fica em um cadastro de usuário devedor. Calcule a probabilidade dessa ocorrência.

Exercícios

2) Seja X a variável aleatória denotando o tempo semanal necessário para completar um pequeno contrato. A fdp de X é dada por:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x-2}{16}, & \text{para } 2 \le x \le 6 \\ \dfrac{10-x}{16}, & \text{para } 6 < x \le 10 \\ 0, & \text{para outros valores} \end{cases}$$

Calcule:

a) $P(5 \le X \le 7)$;

b) $E(X)$ e $Var(X)$;

c) O lucro do contrato depende do tempo necessário para completá-lo, através da função: Lucro = 100 - 10X (em US$). Determine o lucro esperado por contrato.

Exercícios

3) Uma livraria mantém extensos registros das vendas diárias dos livros. Com os dados coletados construiu a seguinte distribuição de probabilidade da variável aleatória X = número de livros vendidos por semana:

x_i	*0*	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*
$p(x_i)$	**0,05**	**0,15**	**0,42**	**0,20**	**0,08**	**0,10**

a) Calcule o número esperado de livros vendidos por semana.
b) Calcule a Var(X).
c) Calcule a probabilidade de se vender mais que 2 livros vendidos por semana.
d) Calcule a probabilidade de se vender no máximo um livro.
e) O lucro da livraria é obtido através da relação $Y=3X^2+X-2$. Qual o lucro esperado da livraria?