

Controle Estatístico de Qualidade

Capítulo 5
(montgomery)



Gráficos de Controle para Variáveis

- **Relembrando**

- Dois objetivos do CEP:
 - Manter o processo operando em condição estável durante maior parte do tempo;
 - Reduzir a sua variabilidade
- As Cartas de Controle (introduzidas por Shewhart na década de 20) são ferramentas para alcançar tais objetivos.
- Além disso, o uso de cartas de controle facilita:
 - Reconhecer desvios em relação ao comportamento normal;
 - Identificação de oportunidades de melhoria;
 - Verificação da eficácia das ações tomadas com o intuito de corrigir esses desvios.

Gráficos de Controle para Variáveis

● Introdução

- No contexto do Controle de Qualidade, uma característica da qualidade que é medida em uma **escala numérica** é chamada **variável**.
 - Ex: Tamanho, Largura, Temperatura, Volume, etc;
- Os gráficos \bar{X} e **R** foram desenvolvidos por Shewhart para monitorar a média e a variabilidade de variáveis numéricas.
- Posteriormente, serão introduzidas algumas variações destes gráficos.

Gráficos de Controle para Variáveis

- **Base Estatística dos Gráficos \bar{X} e R**

- Suponha que a característica de interesse, X , é normalmente distribuída com média μ e desvio padrão σ , conhecidos;
- Seja x_1, \dots, x_n uma amostra de tamanho n , então a média amostral é dada por

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}$$

- Também sabemos que \bar{x} é normalmente distribuído com média μ e desvio padrão σ/\sqrt{n}

Gráficos de Controle para Variáveis

- **Base Estatística dos Gráficos \bar{X} e R**

- Além disso, há uma probabilidade de $1-\alpha$ de qualquer média amostral cair entre

$$\mu \pm Z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

- Assim, **se μ e σ são conhecidos**, podemos usar a expressão acima para obter os LIC e LSC em um gráfico de controle para média amostral.
- Vimos também que é comum utilizar $Z_{\alpha/2} = 3$.

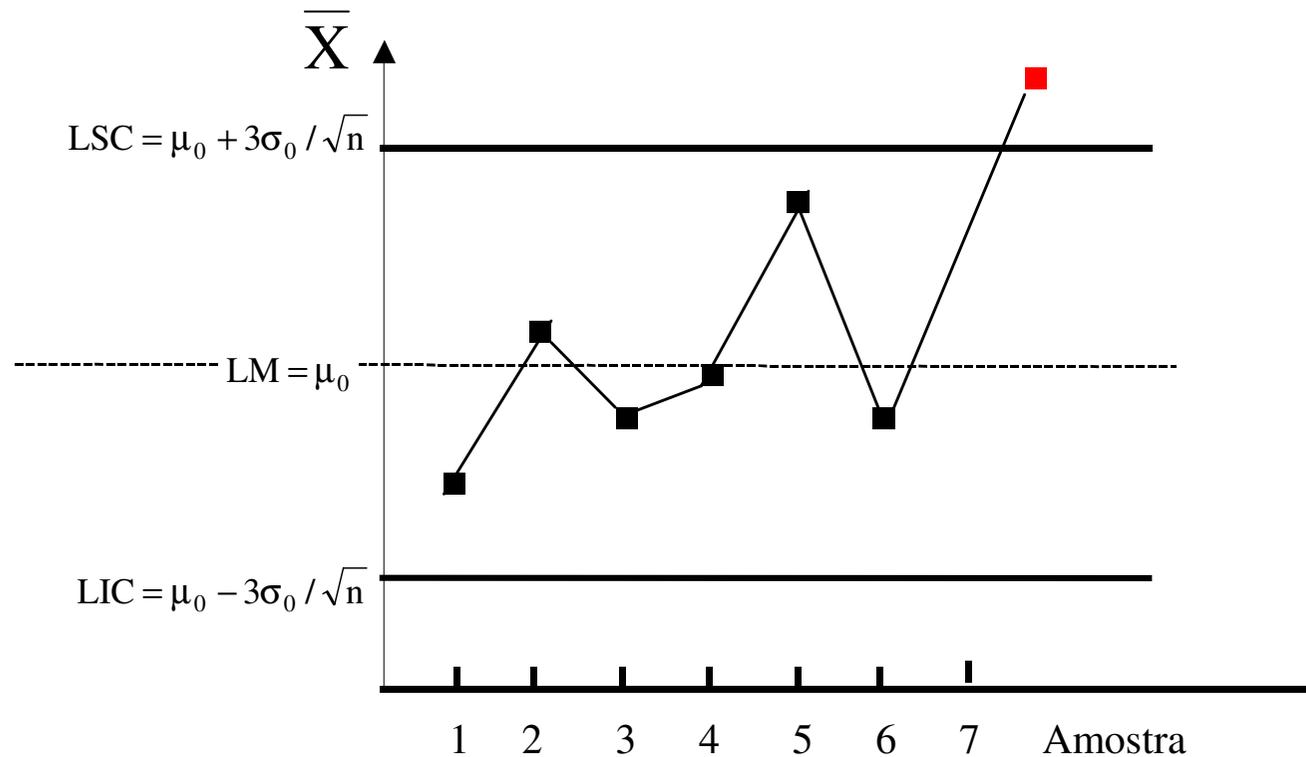
Gráficos de Controle para Variáveis

- **Base Estatística dos Gráficos \bar{X} e R**

- Se uma média amostral cair fora desses limites, isso é uma indicação que a média do processo não é mais igual a μ .
- Vale ressaltar que os resultados acima ainda continuam aproximadamente corretos, mesmo na hipótese de não-normalidade da variável \mathbf{X} , devido ao **Teorema Central do Limite**.

Gráficos de Controle para Variáveis

- Base Estatística dos Gráficos \bar{X} e R



Gráficos de Controle para Variáveis

- Base Estatística dos Gráficos \bar{X} e R

- No entanto, **na prática μ e σ são desconhecidos** e precisam ser estimados a partir de amostras ou subgrupos, coletados quando o **processo** estava **sob controle**.
- Shewhart sugere a coleta de **m** subgrupos (20 a 25) de tamanho **n** pequeno (4, 5, ou 6 cada), objetivando a construção de subgrupos racionais com baixo custo de amostragem.

Gráficos de Controle para Variáveis

- Gráfico \bar{X}

- Sejam $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_m$ as médias de cada uma das amostras, **em m subgrupos**. Então, o melhor estimador para média do processo (μ) é dado por

$$\bar{\bar{x}} = \frac{\sum_{i=1}^m \bar{x}_i}{m}$$

- onde, \bar{x}_i é a média amostral do i -ésimo subgrupo.
- Logo, $\bar{\bar{x}}$ deverá ser usado como a **linha central do gráfico \bar{X}**

Gráficos de Controle para Variáveis

- Gráfico \bar{X}

- Para **construir os limites de controle**, precisamos de um estimador para σ

- σ pode ser estimado pelos desvios-padrões ou pelas amplitudes das m amostras;

- No momento, vamos optar pelas amplitudes. Defina a amplitude de uma amostra por

$$R = X_{\max} - X_{\min}$$

- Seja R_1, R_2, \dots, R_m as amplitudes das m amostras, temos que a amplitude média é dada por

- $$\bar{R} = \frac{\sum_{i=1}^m R_i}{m}$$

Gráficos de Controle para Variáveis

- Gráfico \bar{X}

- Apresentamos a seguir as expressões para construção dos limites de controle para o gráfico \bar{X}

$$LSC = \bar{\bar{x}} + A_2 \bar{R}$$

$$LM = \bar{\bar{x}}$$

$$LIC = \bar{\bar{x}} - A_2 \bar{R}$$

A constante A_2 encontra-se no Apêndice VI do livro:
Introd. ao Controle de Qualidade - Montgomery (4ª Ed.)

Gráficos de Controle para Variáveis

• Gráfico R

- A variabilidade do processo pode ser monitorada através das amplitudes amostrais R , em um gráfico de controle:

$$LSC = D_4 \bar{R}$$

$$LM = \bar{R}$$

$$LIC = D_3 \bar{R}$$

- Lembrando que o estimador não viesado para σ é dado por

$$\hat{\sigma} = \frac{\bar{R}}{d_2}$$

As constantes D_3 e D_4 encontram-se no Apêndice VI do livro:
Introd. ao Controle de Qualidade - Montgomery (4ª Ed.)

APÊNDICE VI Fatores para Construção de Gráficos de Controle para Variáveis

Observações na Amostra, <i>n</i>	Gráfico para Médias			Gráficos para Desvios Padrão						Gráficos para Amplitudes						
	Fatores para Limites de Controle			Fatores para Linha Central		Fatores para Limites de Controle				Fatores para Linha Central		Fatores para Limites de Controle				
	<i>A</i>	<i>A</i> ₂	<i>A</i> ₃	<i>c</i> ₄	1/ <i>c</i> ₄	<i>B</i> ₃	<i>B</i> ₄	<i>B</i> ₅	<i>B</i> ₆	<i>d</i> ₂	1/ <i>d</i> ₂	<i>d</i> ₃	<i>D</i> ₁	<i>D</i> ₂	<i>D</i> ₃	<i>D</i> ₄
2	2,121	1,880	2,659	0,7979	1,2533	0	3,267	0	2,606	1,128	0,8865	0,853	0	3,686	0	3,267
3	1,732	1,023	1,954	0,8862	1,1284	0	2,568	0	2,276	1,693	0,5907	0,888	0	4,358	0	2,575
4	1,500	0,729	1,628	0,9213	1,0854	0	2,266	0	2,088	2,059	0,4857	0,880	0	4,698	0	2,282
5	1,342	0,577	1,427	0,9400	1,0638	0	2,089	0	1,964	2,326	0,4299	0,864	0	4,918	0	2,115
6	1,225	0,483	1,287	0,9515	1,0510	0,030	1,970	0,029	1,874	2,534	0,3946	0,848	0	5,078	0	2,004
7	1,134	0,419	1,182	0,9594	1,0423	0,118	1,882	0,113	1,806	2,704	0,3698	0,833	0,204	5,204	0,076	1,924
8	1,061	0,373	1,099	0,9650	1,0363	0,185	1,815	0,179	1,751	2,847	0,3512	0,820	0,388	5,306	0,136	1,864
9	1,000	0,337	1,032	0,9693	1,0317	0,239	1,761	0,232	1,707	2,970	0,3367	0,808	0,547	5,393	0,184	1,816
10	0,949	0,308	0,975	0,9727	1,0281	0,284	1,716	0,276	1,669	3,078	0,3249	0,797	0,687	5,469	0,223	1,777
11	0,905	0,285	0,927	0,9754	1,0252	0,321	1,679	0,313	1,637	3,173	0,3152	0,787	0,811	5,535	0,256	1,744
12	0,866	0,266	0,886	0,9776	1,0229	0,354	1,646	0,346	1,610	3,258	0,3069	0,778	0,922	5,594	0,283	1,717
13	0,832	0,249	0,850	0,9794	1,0210	0,382	1,618	0,374	1,585	3,336	0,2998	0,770	1,025	5,647	0,307	1,693
14	0,802	0,235	0,817	0,9810	1,0194	0,406	1,594	0,399	1,563	3,407	0,2935	0,763	1,118	5,696	0,328	1,672
15	0,775	0,223	0,789	0,9823	1,0180	0,428	1,572	0,421	1,544	3,472	0,2880	0,756	1,203	5,741	0,347	1,653
16	0,750	0,212	0,763	0,9835	1,0168	0,448	1,552	0,440	1,526	3,532	0,2831	0,750	1,282	5,782	0,363	1,637
17	0,728	0,203	0,739	0,9845	1,0157	0,466	1,534	0,458	1,511	3,588	0,2787	0,744	1,356	5,820	0,378	1,622
18	0,707	0,194	0,718	0,9854	1,0148	0,482	1,518	0,475	1,496	3,640	0,2747	0,739	1,424	5,856	0,391	1,608
19	0,688	0,187	0,698	0,9862	1,0140	0,497	1,503	0,490	1,483	3,689	0,2711	0,734	1,487	5,891	0,403	1,597
20	0,671	0,180	0,680	0,9869	1,0133	0,510	1,490	0,504	1,470	3,735	0,2677	0,729	1,549	5,921	0,415	1,585
21	0,655	0,173	0,663	0,9876	1,0126	0,523	1,477	0,516	1,459	3,778	0,2647	0,724	1,605	5,951	0,425	1,575
22	0,640	0,167	0,647	0,9882	1,0119	0,534	1,466	0,528	1,448	3,819	0,2618	0,720	1,659	5,979	0,434	1,566
23	0,626	0,162	0,633	0,9887	1,0114	0,545	1,455	0,539	1,438	3,858	0,2592	0,716	1,710	6,006	0,443	1,557
24	0,612	0,157	0,619	0,9892	1,0109	0,555	1,445	0,549	1,429	3,895	0,2567	0,712	1,759	6,031	0,451	1,548
25	0,600	0,153	0,606	0,9896	1,0105	0,565	1,435	0,559	1,420	3,931	0,2544	0,708	1,806	6,056	0,459	1,541

Para $n > 25$.

$$A = \frac{3}{\sqrt{n}} \quad A_3 = \frac{3}{c_4 \sqrt{n}} \quad c_4 \approx \frac{4(n-1)}{4n-3}$$

$$B_3 = 1 - \frac{3}{c_4 \sqrt{2(n-1)}} \quad B_4 = 1 + \frac{3}{c_4 \sqrt{2(n-1)}}$$

$$B_5 = c_4 - \frac{3}{\sqrt{2(n-1)}} \quad B_6 = c_4 + \frac{3}{\sqrt{2(n-1)}}$$

Gráficos de Controle para Variáveis

Limites de Controle Tentativos

- Quando amostras preliminares são usadas para a construção dos gráficos, é comum tratar os limites de controles obtidos como **limites de controle tentativos**.
- Se todos os pontos caem dentro dos limites de controle e não se observa nenhum comportamento sistemático, conclui-se que o **processo estava sob controle** no passado e que os **limites tentativos são apropriados**

Gráficos de Controle para Variáveis

Limites de Controle Tentativos

- Caso algum ponto se configure fora de controle quando comparado com os limites tentativos, torna-se necessária uma **revisão de tais limites**.
- **Revisão**
 1. Identificar uma causa atribuível;
 2. Se não for encontrada uma causa, eliminar o ponto supondo que o mesmo provem de um processo fora de controle ou
 3. Não eliminar o ponto, caso ele não altere significativamente os valores dos limites de controle.

Gráficos de Controle para Variáveis

Revisão dos Limites Tentativos e Linhas Centrais

- Em geral, todos os gráficos de controle necessitam uma revisão periódica dos limites tentativos e linhas centrais
 - A cada: semana, mês, 25, 50 ou 100 amostras.
- Na revisão lembre-se de usar pelo menos 25 amostras ou subgrupos.

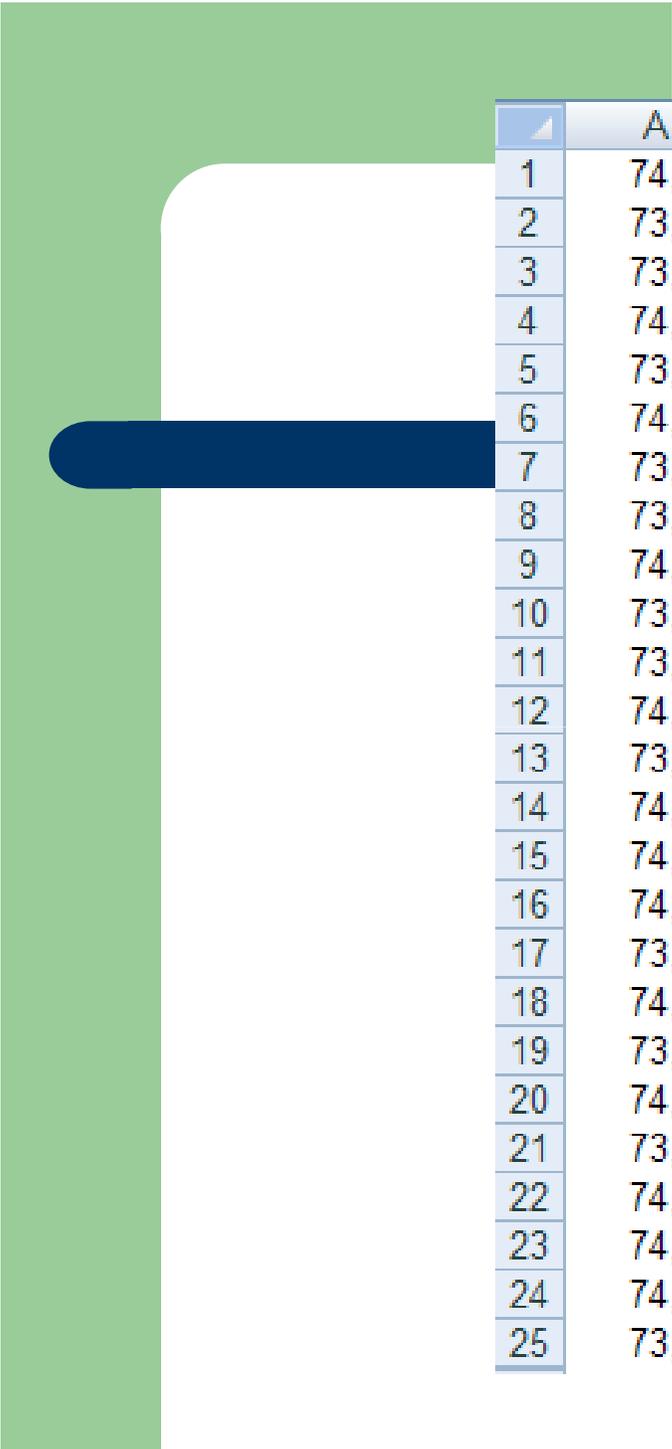
Desenvolvimento e Uso dos Gráficos \bar{X} e R

- Na construção dos gráficos \bar{X} e R é aconselhável iniciar com o gráfico R.
- Como os limites de controle do gráfico \bar{X} dependem da variabilidade do processo, tais limites não serão significativos no caso da variabilidade do processo não estar sob controle.
- **Dicas**
 - O gráfico \bar{X} monitora a média da característica da qualidade de um processo
 - O gráfico R monitora a variabilidade dessa característica.
 - Nunca tente interpretar o gráfico \bar{X} quando o gráfico R indicar alguma condição fora de controle

Desenvolvimento e Uso dos Gráficos \bar{X} e R

Exemplo

- Anéis de pistão para motores de automóveis são fabricados por um processo. Deseja-se estabelecer um controle estatístico para o diâmetro interno dos anéis.
- 25 amostras (m), cada uma de tamanho 5 (n), foram extraídas quando o mesmo estava sob controle.
- As medidas são exibidas a seguir



	A	B	C	D	E
1	74,030	74,002	74,019	73,992	74,008
2	73,995	73,992	74,001	74,011	74,004
3	73,988	74,024	74,021	74,005	74,002
4	74,002	73,996	73,993	74,015	74,009
5	73,992	74,007	74,015	73,989	74,014
6	74,009	73,994	73,997	73,985	73,993
7	73,995	74,006	73,994	74,000	74,005
8	73,985	74,003	73,993	74,015	73,988
9	74,008	73,995	74,009	74,005	74,004
10	73,998	74,000	73,990	74,007	73,995
11	73,994	73,998	73,994	73,995	73,990
12	74,004	74,000	74,007	74,000	73,996
13	73,983	74,002	73,998	73,997	74,012
14	74,006	73,967	73,994	74,000	73,984
15	74,012	74,014	73,998	73,999	74,007
16	74,000	73,984	74,005	73,998	73,996
17	73,994	74,012	73,986	74,005	74,007
18	74,006	74,010	74,018	74,003	74,000
19	73,984	74,002	74,003	74,005	73,997
20	74,000	74,010	74,013	74,020	74,003
21	73,982	74,001	74,015	74,005	73,996
22	74,004	73,999	73,990	74,006	74,009
23	74,010	73,989	73,990	74,009	74,014
24	74,015	74,008	73,993	74,000	74,010
25	73,982	73,984	73,995	74,017	74,013



Desenvolvimento e Uso dos Gráficos \bar{X} e R

Exemplo – Anéis de Pistão

Construção do gráfico R

- A linha central do gráfico R é obtida por

$$\bar{R} = \frac{\sum_{i=1}^{25} R_i}{m} = \frac{0,581}{25} = 0,023$$

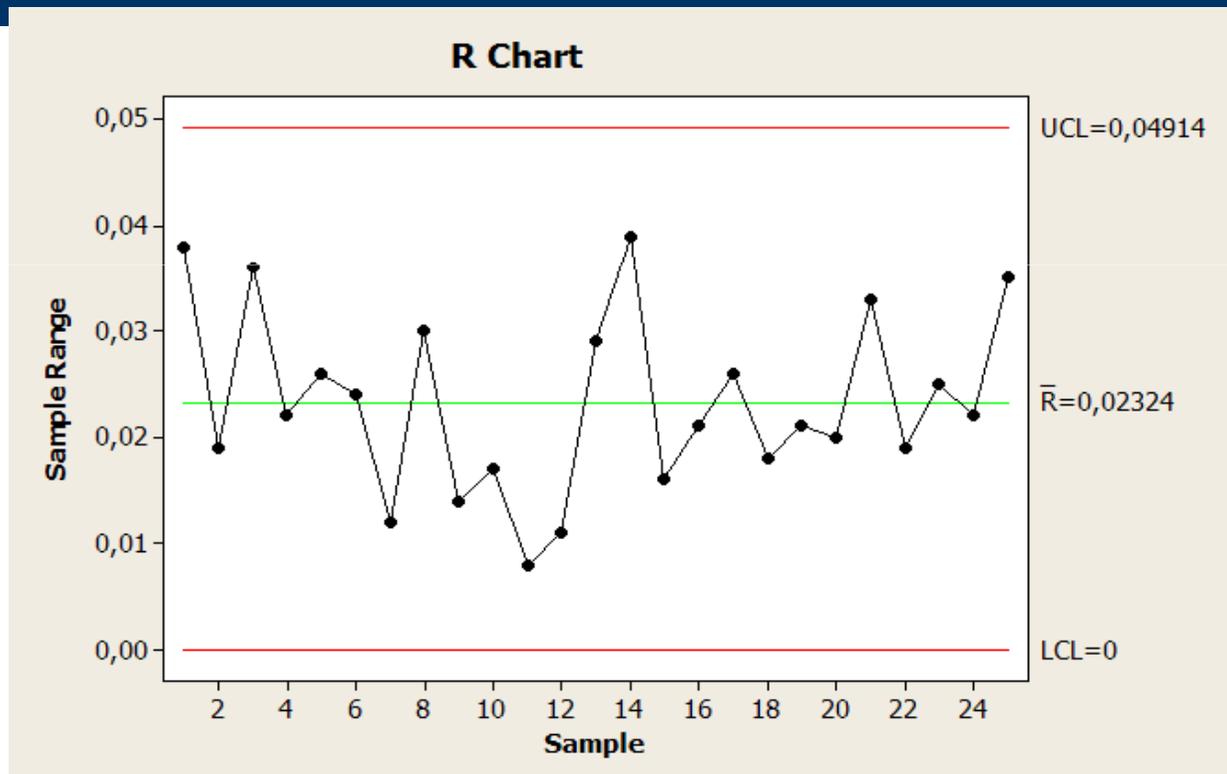
onde $R_i = x_{\max} - x_{\min}$, $i = 1, \dots, m$

- Para $n = 5$, obtemos do Apêndice VI os valores $D_3 = 0$ e $D_4 = 2,115$.

- Logo, $LIC = \bar{R}D_3 = 0,023.(0) = 0$

$$LSC = \bar{R}D_4 = 0,023.(2,115) = 0,049$$

Desenvolvimento e Uso dos Gráficos \bar{X} e R



Nenhum ponto fora dos limites de controle
Nenhum padrão não aleatório foi identificado

Desenvolvimento e Uso dos Gráficos \bar{X} e R

Exemplo – Anéis de Pistão

Construção do gráfico \bar{X}

- Como o gráfico R indica que a variabilidade do processo está sob controle, podemos agora construir o gráfico \bar{X}

- A linha central do gráfico é obtida por

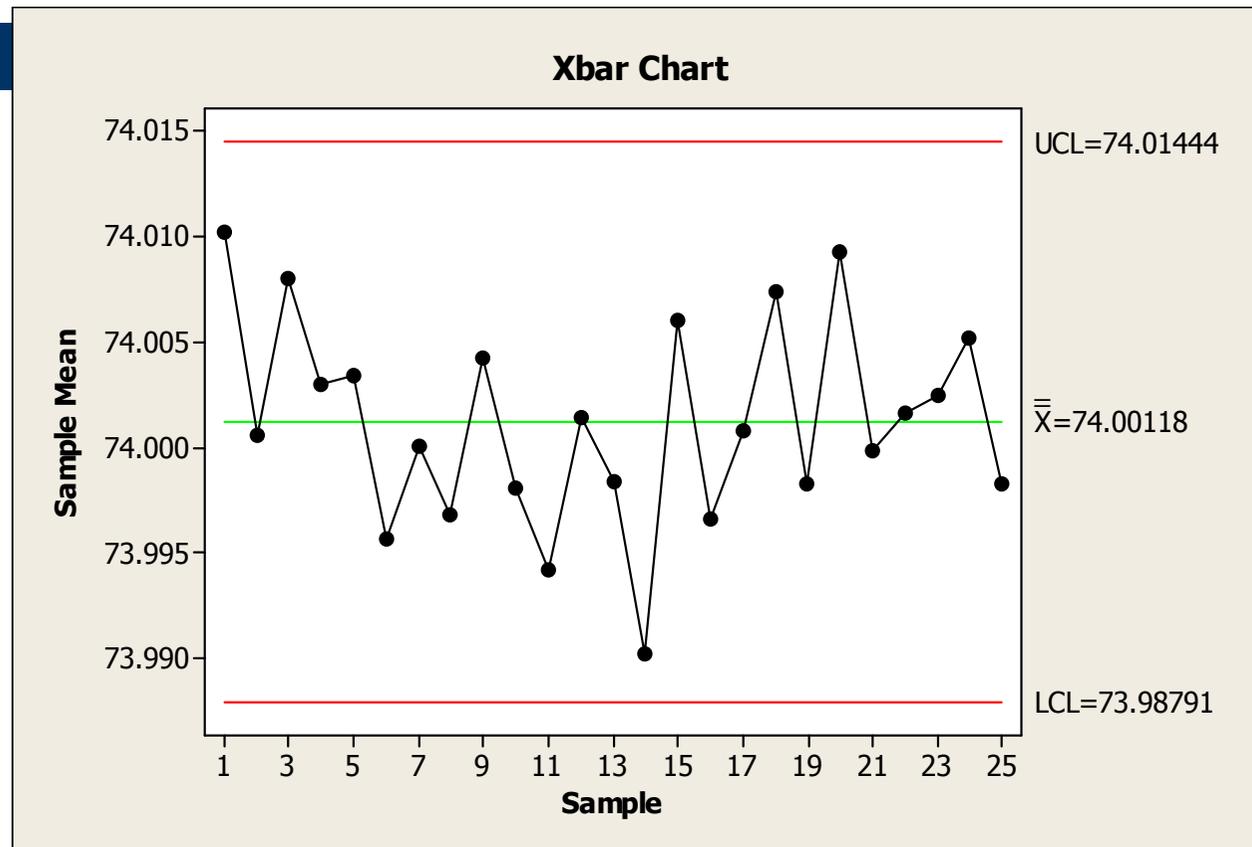
$$\bar{\bar{x}} = \frac{\sum_{i=1}^{25} \bar{x}_i}{m} = \frac{1850,0294}{25} = 74,001$$

- Para $n = 5$, obtemos do Apêndice VI $A_2 = 0,577$.

- Logo, $LIC = \bar{\bar{x}} - A_2 \bar{R} = 74,001 - 0,577 \cdot (0,023) = 73,988$

$$LSC = \bar{\bar{x}} + A_2 \bar{R} = 74,001 + 0,577 \cdot (0,023) = 74,014$$

Desenvolvimento e Uso dos Gráficos \bar{X} e R



Nenhum ponto fora dos limites de controle
Nenhum padrão não aleatório foi identificado

Desenvolvimento e Uso dos Gráficos \bar{X} e R

Exemplo – Anéis de Pistão

– Conclusão

- Como ambos os gráficos exibem controle, podemos concluir que o processo está sob controle nos níveis estabelecidos e adotar os limites tentativos para um controle estatístico *on-line* do processo

Estimando a Capacidade do Processo

Os gráficos de controle fornecem informação sobre o desempenho do processo. Uma forma de expressar a capacidade do processo é em termos da razão (ou índice) da capacidade do processo (RCP) C_p , definida para uma característica da qualidade com limites superior e inferior de especificação LSE e LIE como

$$\hat{C}_p = \frac{LSE - LIE}{6\hat{\sigma}}$$

em que

$$\hat{\sigma} = \frac{\bar{R}}{d_2}$$

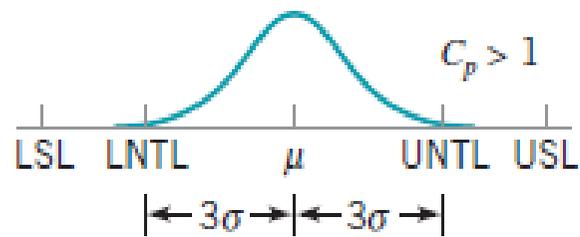
Estimando a Capacidade do Processo

A RCP C_p pode ser interpretado de uma outra forma. A quantidade

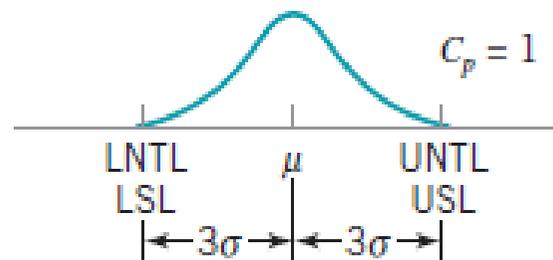
$$\hat{P} = \left(\frac{1}{\hat{C}_p} \right) 100\%$$

é simplesmente a percentagem da faixa de especificação usada pelo sistema.

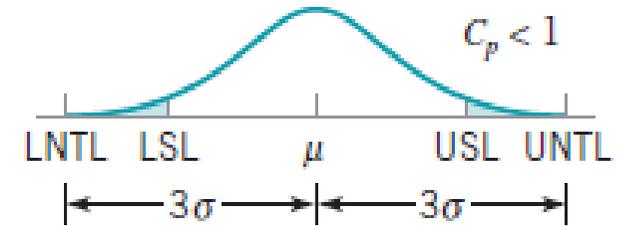
Estimando a Capacidade do Processo



(a)



(b)



(c)

Estimando a Capacidade do Processo

Os gráficos de controle pode ser usado para descrever a capacidade do processo de produzir peças relativa as especificações. No exemplo dos pistões temos que $\bar{x} = 74,001$ mm. O desvio padrão pode ser estimado por

$$\hat{\sigma} = \frac{\bar{R}}{d_2} = \frac{0,023}{2,326} = 0,0099$$

Os limites de especificação para os anéis de pistão são $74 \pm 0,05$ mm. Supondo que o diâmetro dos anéis de pistão seja uma variável aleatória normalmente distribuída, com média 74,001 e desvio padrão 0,0099, podemos estimar a fração de anéis não-conformes como

$$P(NC) = P(X < 73,95) + P(X > 74,05) = \Phi\left(\frac{73,95 - 74,001}{0,0099}\right) + 1 - \Phi\left(\frac{74,05 - 74,001}{0,0099}\right) = \Phi(-5,15) + 1 - \Phi(4,04) = 0 + 1 - 0,99998 = 0,00002$$

Isto é, cerca de 0,002% [20 partes por milhão (ppm)] dos anéis produzidos estará fora das especificações.

Estimando a Capacidade do Processo

Para o exemplo dos anéis, temos:

$$\hat{C}_p = \frac{74,05 - 73,95}{6 \times 0,0099} = 1,68$$

$$\hat{P} = \left(\frac{1}{1,68} \right) 100\% = 59,5\%$$

Desenvolvimento e Uso dos Gráficos \bar{X} e R

Limites de Controle e Limites de Especificação

- Não existe nenhuma relação entre os limites de controle e os limites de especificação do processo
- **Limites de Controle (ou limites naturais de tolerância):** são guiados pela variabilidade natural do processo (medido pelo desvio padrão)

Desenvolvimento e Uso dos Gráficos \bar{X} e R

Limites de Controle e Limites de Especificação

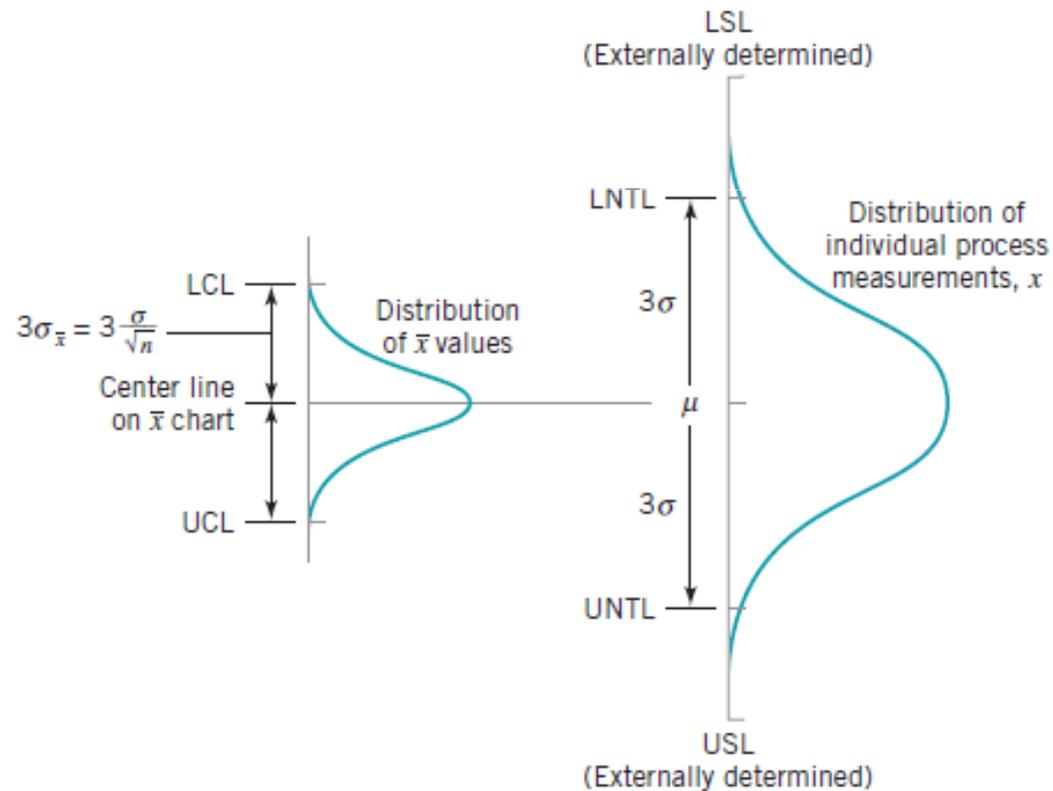
- **Limites de Especificação:** são determinados externamente, ou seja, podem ser especificados pela gerência, engenheiros, clientes, etc.
- Não há relação matemática ou estatística entre limites de controle e especificação
- **O objetivo do CEP, é manter os limites de controle dentro dos limites de especificação**

Desenvolvimento e Uso dos Gráficos \bar{X} e R

Limites Naturais de Tolerância

- São determinados pela variabilidade natural do processo.
- É definido como os limites 3σ acima (LSNT) e abaixo (LINT) da média do processo.

Limites de Controle, Limites de Especificação e Limites Naturais de Tolerância



Desenvolvimento e Uso dos Gráficos \bar{X} e R

Efeito da Não-Normalidade nos Gráficos

- A suposição de normalidade é fundamental no desenvolvimento dos gráficos de controle.
- Uma saída caso se conheça que a distribuição amostral da média e da amplitude **não é normal**, é utilizar limites probabilísticos para os gráficos de controle.
- No entanto, mesmo para populações não-normais, vários autores atestam que a utilização de amostras de tamanho ($n > 3$) já são suficientes para garantir robustez em relação a hipótese de normalidade para o gráfico \bar{X} (**Teorema Central do Limite**)

Desenvolvimento e Uso dos Gráficos \bar{X} e R

Efeito da Não-Normalidade nos Gráficos

- Em relação ao gráfico **R** é importante ressaltar que:
 - Mesmo que a característica da qualidade tenha distribuição normal, o risco α para esse gráfico não será 0,0027. Isso deve ao fato da distribuição de R não ser simétrica . Além disso, note que o gráfico R não é contemplado pelo **Teorema Central do Limite**.
 - Dessa forma, os limites 3σ para esse gráfico são apenas aproximações.
 - Segundo Montgomery, o gráfico R é mais sensível que o gráfico \bar{X} a desvios da normalidade.

Função Característica da Operação

- A habilidade dos gráficos \bar{X} e R em detectar mudanças na qualidade do processo é descrita pelas **curvas característica de operação (CO)**.
- Considere o gráfico \bar{X} com σ conhecido e constante. Suponha que a média μ_0 desloca-se para outro valor $\mu_1 = \mu_0 + k\sigma$
- A probabilidade (**ou risco**) de **NÃO** se detectar esse deslocamento na 1ª amostra subsequente é:

$$\beta = P(LIC \leq \bar{x} \leq LSC \mid \mu = \mu_1 = \mu_0 + k\sigma)$$

Função Característica da Operação

Como $\bar{X} \sim N(\mu, \sigma^2 / n)$

$$LIC = \mu_0 - L\sigma / \sqrt{n}$$

$$LSC = \mu_0 + L\sigma / \sqrt{n}$$

temos que

$$\beta = P(LIC \leq \bar{x} \leq LSC \mid \mu = \mu_1 = \mu_0 + k\sigma)$$

$$\beta = \Phi\left(\frac{LSC - (\mu_0 + k\sigma)}{\sigma / \sqrt{n}}\right) - \Phi\left(\frac{LIC - (\mu_0 + k\sigma)}{\sigma / \sqrt{n}}\right)$$

$$= \Phi\left(\frac{\mu_0 + L\sigma / \sqrt{n} - (\mu_0 + k\sigma)}{\sigma / \sqrt{n}}\right) - \Phi\left(\frac{\mu_0 - L\sigma / \sqrt{n} - (\mu_0 + k\sigma)}{\sigma / \sqrt{n}}\right).$$

Função Característica da Operação

Logo

$$\beta = \Phi(L - k\sqrt{n}) - \Phi(-L - k\sqrt{n})$$

Onde Φ denota a distribuição acumulada da normal padrão.

Exemplo

- Suponha que estamos usando um gráfico \bar{X} com $L=3$ (limites usuais), tamanho de amostra $n=5$ e queremos determinar a probabilidade de detectar um deslocamento para $\mu_1 = \mu_0 + 2\sigma$ na primeira amostra.
- Logo, temos $L=3$, $n=5$ e $k=2$

Função Característica da Operação

- Logo

$$\begin{aligned}\beta &= \Phi(L - k\sqrt{n}) - \Phi(-L - k\sqrt{n}) \\ &= \Phi(3 - 2\sqrt{5}) - \Phi(-3 - 2\sqrt{5}) = \\ &= \Phi(-1,47) - \Phi(-7,37) \cong 0,0708\end{aligned}$$

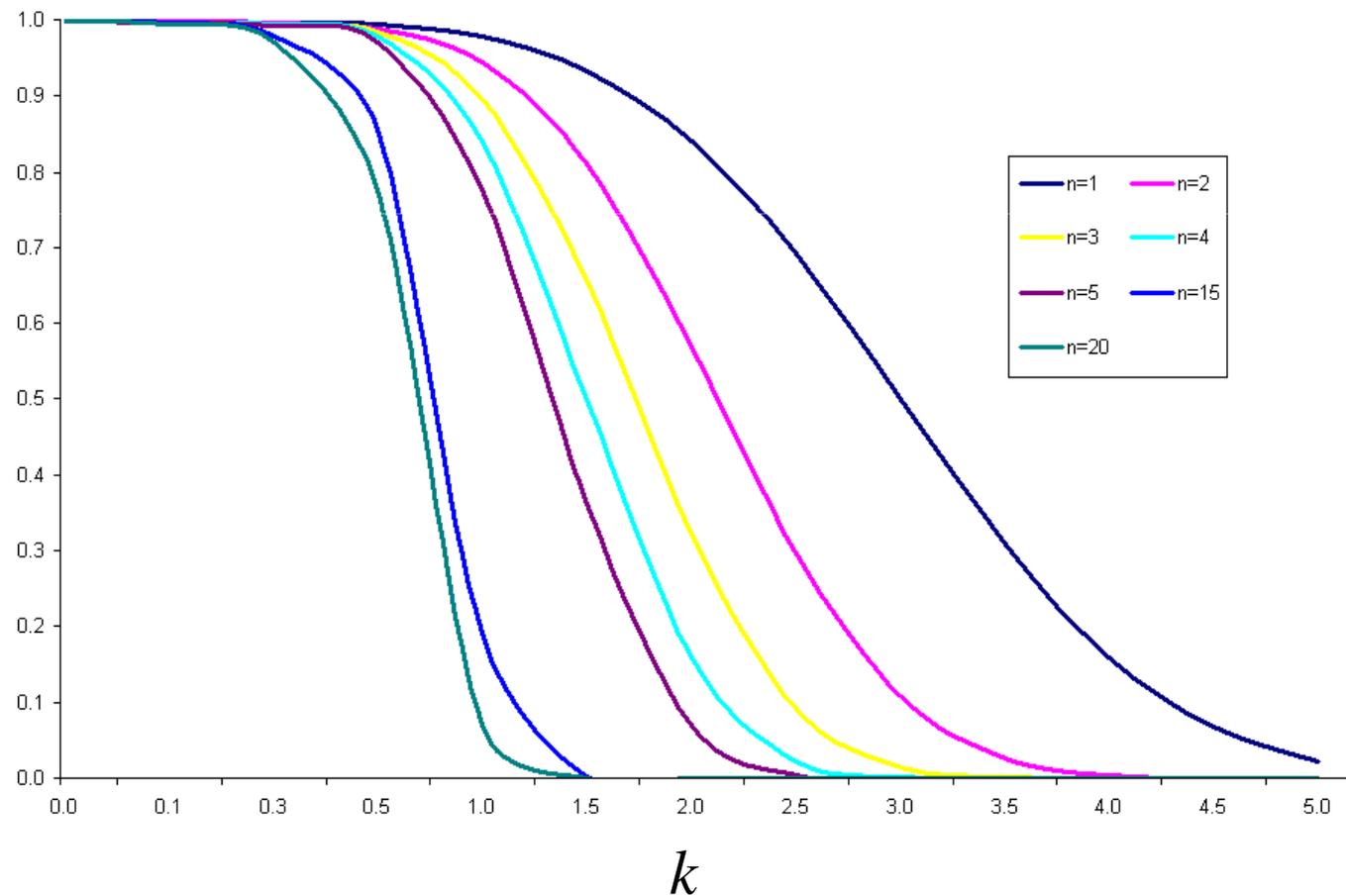
- Essa é a probabilidade (ou risco) de NÃO detectar tal deslocamento.
- A probabilidade desse deslocamento ser detectado na primeira amostra é

$$1 - \beta = 1 - 0,0708 = 0,9292$$

Curvas Característica de Operação para o Gráfico \bar{X} com limites 3σ

β

Prob. de Não detectar um deslocamento na média de " $k\sigma$ " na 1ª amostra



Função Característica da Operação

- Devido a suposição de **independência**, a **probabilidade** de que o deslocamento seja **detectado na r-ésima amostra (subgrupo)** é simplesmente $(1-\beta)$ vezes a **probabilidade de não detecta-lo** em cada uma das $r-1$ amostras iniciais.

$$\beta^{r-1}(1-\beta)$$

- O **comprimento médio da sequência (CMS)** é dado por $1/p$, onde p = probabilidade que um ponto exceda os limites de controle. Logo, teremos que

$$CMS_0 = \frac{1}{\alpha}$$

Processo sob controle

$$CMS_1 = \frac{1}{(1-\beta)}$$

Processo fora de controle

Gráficos de Controle para Variáveis

- **Base Estatística dos Gráficos \bar{X} e S**

- Os gráficos \bar{X} e S são preferidos quando:
 - Tamanho de Amostra $n > 10$ (moderadamente grande)
 - Tamanho de Amostra n é variável
- A construção de tais gráfico seguem a mesma sequência usada na construção dos anteriores.
- **Na prática μ e σ são desconhecidos** e precisam ser estimados a partir de amostras ou subgrupos, coletados quando o **processo** estava **sob controle**.

Gráficos de Controle para Variáveis

- **Dedução dos Limites no Gráfico \bar{X}**

- Portanto, para μ_T e σ_T desconhecidos, temos os limites do gráfico de controle dados por

$$\bar{\bar{x}} \pm Z_{\alpha/2} \frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n}}$$

- Fazendo $A_3 = \frac{Z_{\alpha/2}}{c_4 \sqrt{n}}$ na expressão acima, obtemos

$$LSC = \bar{\bar{x}} + A_3 \bar{S}$$

$$LM = \bar{\bar{x}}$$

$$LIC = \bar{\bar{x}} - A_3 \bar{S}$$

Gráficos de Controle para Variáveis

- **Dedução dos Limites no Gráfico \bar{X}**

- A média dos desvios padrões nas m amostras é definida por

$$\bar{S} = \frac{\sum_{i=1}^m S_i}{m}$$

- onde

$$S_i = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n-1}}$$

Gráficos de Controle para Variáveis

- **Gráfico S**

- Assim, os parâmetros do gráfico S são obtidos por:

$$LSC = B_4 \bar{S}$$

$$LM = \bar{S}$$

$$LIC = B_3 \bar{S}$$

onde: $B_3 = 1 - \frac{3}{c_4} \sqrt{1 - c_4^2}$ $B_4 = 1 + \frac{3}{c_4} \sqrt{1 - c_4^2}$

As constantes B_3 e B_4 encontram-se no Apêndice VI do livro:
Introd. ao Controle de Qualidade - Montgomery (4ª Ed.)

Gráficos de Controle para Variáveis

- Gráfico \bar{X}

- Consequentemente, obtemos os novos limites de controle necessários para construção do gráfico \bar{X}

$$LSC = \bar{\bar{x}} + A_3 \bar{S}$$

$$LM = \bar{\bar{x}}$$

$$LIC = \bar{\bar{x}} - A_3 \bar{S}$$

- Lembrando que o estimador não viesado para σ é dado por

$$\hat{\sigma} = \frac{\bar{S}}{c_4}$$

As constantes A_3 e c_4 encontram-se no Apêndice VI do livro:
Introd. ao Controle de Qualidade - Montgomery (4ª Ed.)

Exemplo: Anéis de Pistão

$$\bar{\bar{x}} = \frac{\sum_{i=1}^{25} \bar{x}_i}{m} = \frac{1850,0294}{25} = 74,001$$

$$\bar{S} = \frac{\sum_{i=1}^{25} S_i}{m} = \frac{0,2350}{25} = 0,0094$$

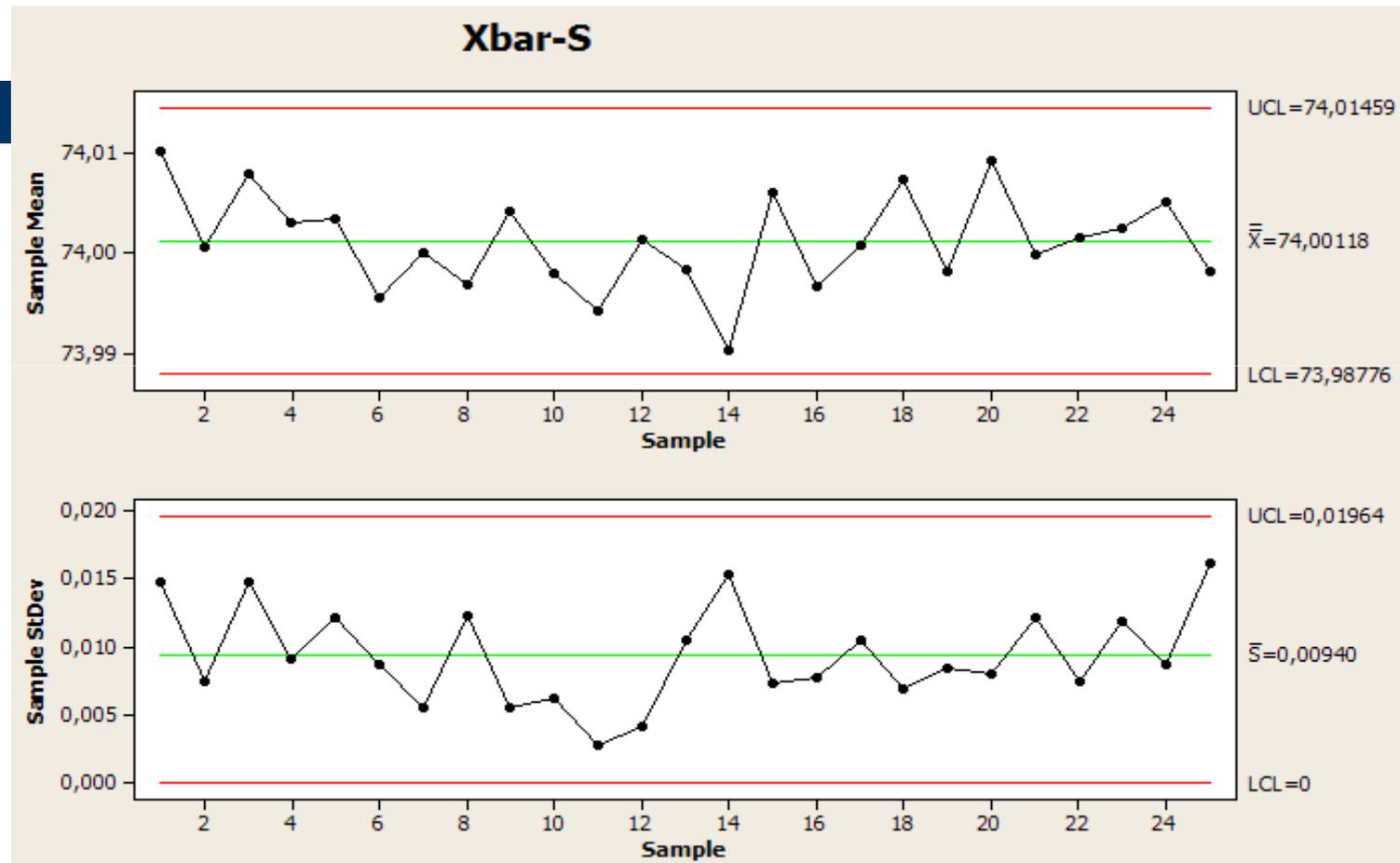
$$LIC = \bar{S}B_3 = 0,0094.(0) = 0$$

$$LSC = \bar{S}B_4 = 0,0094.(2,089) = 0,0196$$

$$LIC = \bar{\bar{x}} - A_3\bar{S} = 74,001 - 1,427.(0,0094) = 73,988$$

$$LSC = \bar{\bar{x}} + A_3\bar{S} = 74,001 + 1,427.(0,0094) = 74,014$$

Exemplo: Anéis de Pistão



Nenhum ponto fora dos limites de controle
Nenhum padrão não aleatório foi identificado

Gráficos de Controle para Variáveis

– Considerações

- Os limites de controle do gráfico \bar{X} , construído a partir do desvio padrão (S), podem coincidir com os limites obtidos com base na amplitude amostral (R). No entanto, normalmente os limites são um pouco diferentes.
- A interpretação do gráfico e também da curva Características de Operação (CO) são idênticas as dos gráficos anteriores

Gráficos de Controle para Variáveis

- Gráficos \bar{X} e S com tamanho de amostra variável
 - São relativamente simples de usar
 - A **linha central** dos gráficos será uma **média ponderada** em função do tamanho n_i de cada amostra.

$$\bar{\bar{x}} = \frac{\sum_{i=1}^m n_i \bar{x}_i}{\sum_{i=1}^m n_i} \quad \bar{S} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^m (n_i - 1) S_i^2}{\sum_{i=1}^m n_i - m}}$$

Gráficos de Controle para Variáveis

- Gráficos \bar{X} e S com tamanho de amostra variável

- Os limites de controle continuam sendo calculados através das expressões

$$LSC = \bar{\bar{x}} + A_3\bar{S}$$

$$LM = \bar{\bar{x}}$$

$$LIC = \bar{\bar{x}} - A_3\bar{S}$$

$$LSC = B_4\bar{S}$$

$$LM = \bar{S}$$

$$LIC = B_3\bar{S}$$

- **No entanto, as constantes A_3 , B_3 e B_4 vão depender do tamanho de amostra usado em cada subgrupo individual.**

	A	B	C	D	E
1	74,030	74,002	74,019	73,992	74,008
2	73,995	73,992	74,001		
3	73,988	74,024	74,021	74,005	74,002
4	74,002	73,996	73,993	74,015	74,009
5	73,992	74,007	74,015	73,989	74,014
6	74,009	73,994	73,997	73,985	
7	73,995	74,006	73,994	74,000	
8	73,985	74,003	73,993	74,015	73,988
9	74,008	73,995	74,009	74,005	
10	73,998	74,000	73,990	74,007	73,995
11	73,994	73,998	73,994	73,995	73,990
12	74,004	74,000	74,007	74,000	73,996
13	73,983	74,002	73,998		
14	74,006	73,967	73,994	74,000	73,984
15	74,012	74,014	73,998		
16	74,000	73,984	74,005	73,998	73,996
17	73,994	74,012	73,986	74,005	
18	74,006	74,010	74,018	74,003	74,000
19	73,984	74,002	74,003	74,005	73,997
20	74,000	74,010	74,013		
21	73,982	74,001	74,015	74,005	73,996
22	74,004	73,999	73,990	74,006	74,009
23	74,010	73,989	73,990	74,009	74,014
24	74,015	74,008	73,993	74,000	74,010
25	73,982	73,984	73,995	74,017	74,013

Exemplo

Os dados a seguir são uma modificação dos dados sobre anéis de pistão usados anteriormente

Exemplo: Anéis de Pistão Modificado

$$\bar{\bar{x}} = \frac{\sum_{i=1}^m n_i \bar{x}_i}{\sum_{i=1}^m n_i} = \frac{5(74,010) + 3(73,996) + \dots + 5(73,998)}{5 + 3 + \dots + 5} = \frac{8362,075}{113} = 74,001$$

$$\begin{aligned} \bar{S} &= \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^m (n_i - 1) S_i^2}{\sum_{i=1}^m n_i - m}} = \sqrt{\frac{4(0,0148)^2 + 2(0,0046)^2 + \dots + 4(0,0162)^2}{5 + 3 + \dots + 5 - 25}} = \\ &= \sqrt{\frac{0,008426}{88}} = 0,0098 \end{aligned}$$

Exemplo: Anéis de Pistão Modificado

- Para ilustrar, considere a primeira amostra onde $n_1 = 5$. Logo,

$$LIC = \bar{x} - A_3 \bar{S} = 74,001 - 1,427 \cdot (0,0098) = 73,987$$

$$LSC = \bar{x} + A_3 \bar{S} = 74,001 + 1,427 \cdot (0,0098) = 74,015$$

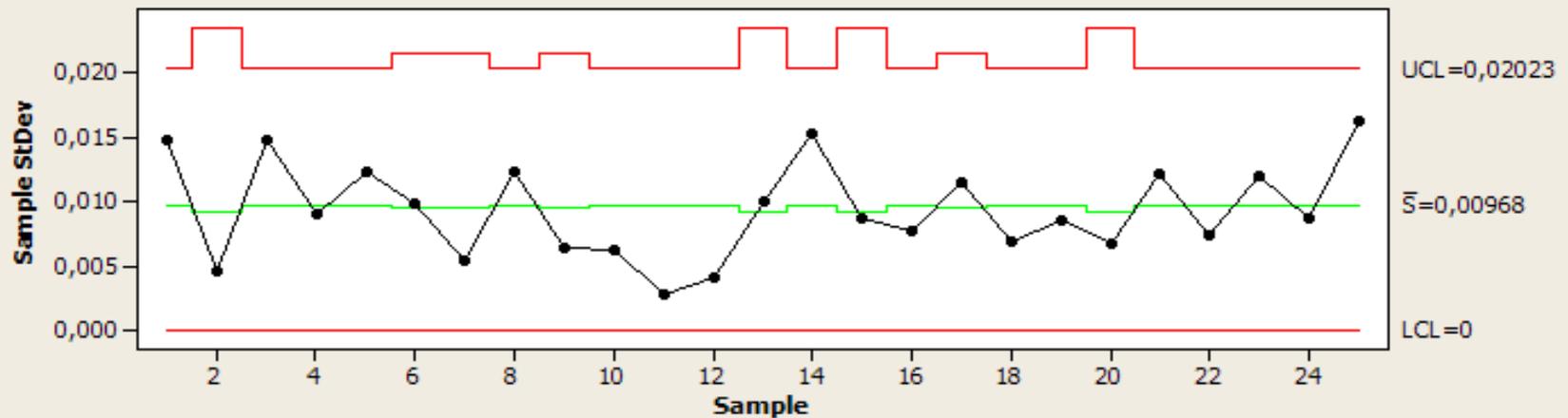
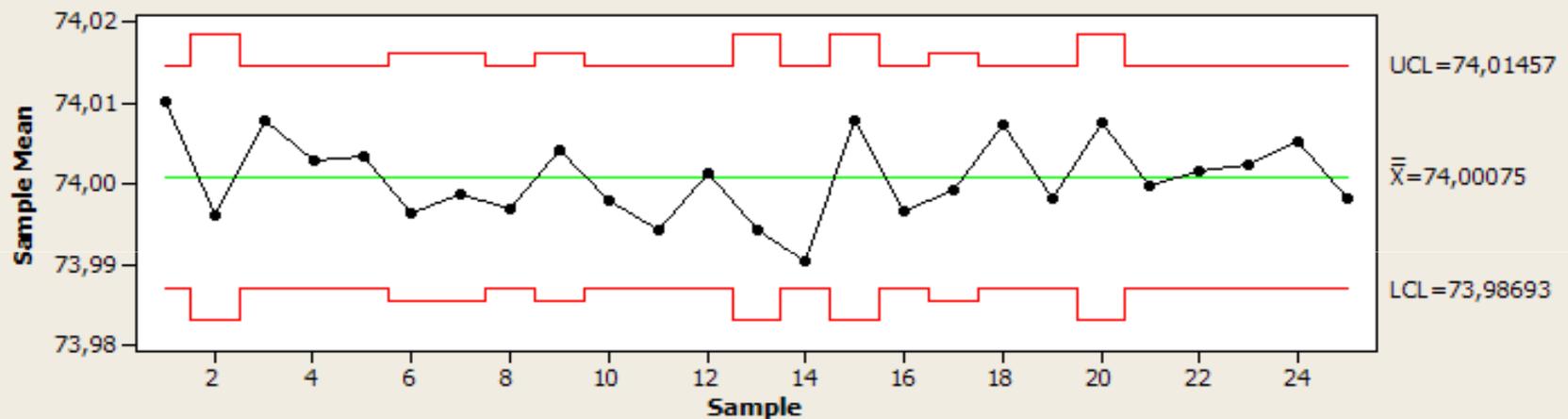
$$LIC = \bar{S} B_3 = 0,0098 \cdot (0) = 0$$

$$LSC = \bar{S} B_4 = 0,0098 \cdot (2,089) = 0,020$$

- Os limites para segunda amostra devem ser calculados levando em conta que $n_2 = 3$, e assim sucessivamente.

Gráficos de Controle para Variáveis

Xbar-S Chart



Gráficos de Controle para Variáveis

– Considerações

- Uma alternativa para o uso de limites de controle variáveis nos gráficos \bar{X} e S é tomar como base um tamanho de amostra médio \bar{n} .
- Tal abordagem pode ser satisfatória se os n_i não são muito diferentes.
- No entanto, como média dos n_i pode não ser um número inteiro, uma saída é construir tais limites baseando-se no tamanho de amostra modal (mais frequente).
- Montgomery comenta que tal abordagem pode ser útil em algumas situações como, por exemplo, numa apresentação dos gráficos a gerência.

Gráficos de Controle Shewhart para Amostras Individuais

- Existem situações onde o tamanho da amostra para monitoramento do processo é $n=1$.
- Por exemplo:
 - Utilização de inspeção e medição automática de modo que toda unidade fabricada é inspecionada;
 - Taxa de produção muito lenta torna inconveniente acumular tamanhos de amostras $n > 1$;
 - Medidas sobre algum parâmetro diferem muito pouco e produzem um desvio padrão muito pequeno.
 - Entre outros
- Em tais situações o gráfico de controle para unidades individuais é útil.

Gráficos de Controle Shewhart para Amostras Individuais

- A **variabilidade do processo** é estimada através da **amplitude móvel**, definida por:

$$MR_i = |x_i - x_{i-1}|$$

- No exemplo a seguir ilustramos o procedimento para construção dos **gráficos de controle para a amplitude móvel** e para **medidas individuais**

Viscosidade da Tinta de Base para Aviões

Lote	Viscosidade (x)	MR
1	33.75	-
2	33.05	0.70
3	34.00	0.95
4	33.81	0.19
5	33.46	0.35
6	34.02	0.56
7	33.68	0.34
8	33.27	0.41
9	33.49	0.22
10	33.20	0.29
11	33.62	0.42
12	33.00	0.62
13	33.54	0.54
14	33.12	0.42
15	33.84	0.72
Média	33.52	0.48

Gráficos de Controle Shewhart para Amostras Individuais

- Os limites de controle são adaptações dos utilizados nos gráficos \bar{X} e R , sendo calculados através das expressões

$$LSC = D_4 \overline{MR}$$

$$LM = \overline{MR}$$

$$LIC = D_3 \overline{MR}$$

$$LSC = \bar{x} + 3 \frac{\overline{MR}}{d_2}$$

$$LM = \bar{x}$$

$$LIC = \bar{x} - 3 \frac{\overline{MR}}{d_2}$$

- As constantes d_2 , D_3 e D_4 são obtidas no Apêndice VI.

Gráficos de Controle Shewhart para Amostras Individuais

- Note que no exemplo usamos uma amplitude móvel de tamanho 2, logo n será igual 2 no Apêndice VI.
- Os limites de controle para o gráfico da amplitude móvel serão:

$$LSC = D_4 \overline{MR} = 3,267(0,48) = 1,57$$

$$LM = \overline{MR} = 0,48$$

$$LIC = D_3 \overline{MR} = 0(0,48) = 0,00$$

Gráficos de Controle Shewhart para Amostras Individuais

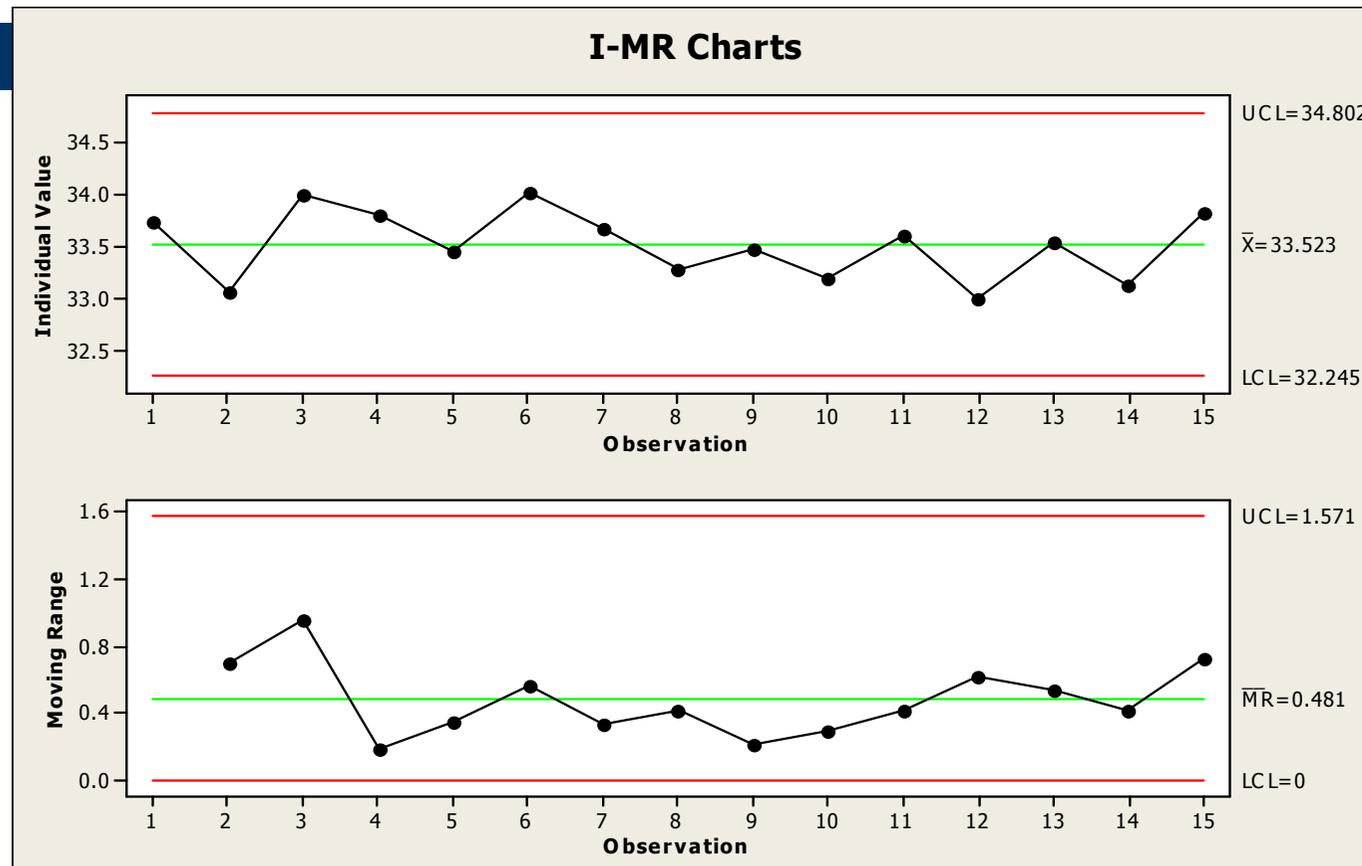
- Os limites para o gráfico de controle das medidas individuais serão:

$$LSC = \bar{x} + 3 \frac{\overline{MR}}{d_2} = 33,52 + 3 \frac{0,48}{1,128} = 34,80$$

$$LM = \bar{x} = 33,52$$

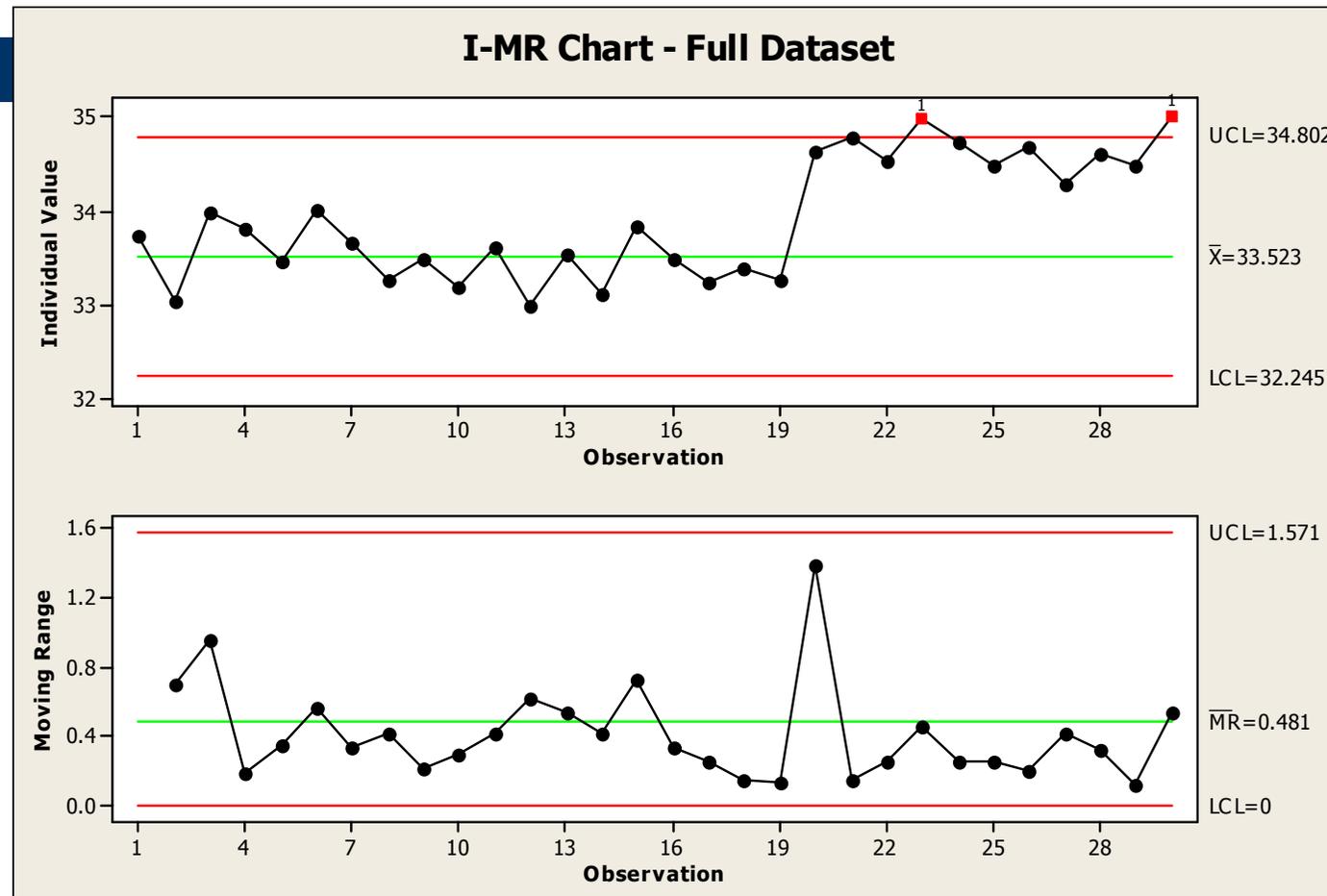
$$LIC = \bar{x} - 3 \frac{\overline{MR}}{d_2} = 33,52 - 3 \frac{0,48}{1,128} = 32,24$$

Gráficos de Controle Shewhart para Amostras Individuais



Nenhum ponto fora dos limites de controle
Nenhum padrão não aleatório foi identificado

Gráficos de Controle Shewhart para Amostras Individuais



Banco de Dados Completo – Processo fora de Controle

Gráficos de Controle Shewhart para Amostras Individuais

– Considerações

- O gráfico para observações individuais é interpretado de maneira análoga ao gráfico \bar{X} .
- Alguns analistas **recomendam que não se use o gráfico das amplitudes móveis**, visto que elas são correlacionadas.
- Segundo Montgomery, **gráficos para amostras individuais são extremamente sensíveis a dados não normais** ou mesmo com um moderado desvio na normalidade.
- Uma saída seria determinar os limites com base na distribuição amostral (ao menos 100 observações).
- Outra saída seria transformar a variável original em uma nova variável aproximadamente normal.

Exercício

Amostras de $n=5$ unidades são tiradas de um processo a cada hora. Os valores de \bar{X} e R para uma determinada característica da qualidade são calculados. Depois de 25 amostras serem coletadas, obtemos $\bar{\bar{x}} = 20$ e $\bar{R} = 4,56$.

- a) Quais são os limites três-sigma para \bar{X} e R?
- b) Ambos os gráficos exibem controle. Estime o desvio padrão do processo.
- c) Suponha que a saída do processo seja normalmente distribuída. Se as especificações são 19 ± 5 , quais são as suas conclusões com respeito à capacidade do processo?
- d) Se a média do processo se desloca para 24, qual é a probabilidade de não se detectar esse deslocamento na amostra subsequente?

Exercício

Amostras de $n=6$ itens são retiradas de um processo de manufatura em intervalos irregulares. Uma característica da qualidade, normalmente distribuída, é medida e valores de \bar{X} e S são calculados para cada amostra. Depois de 50 subgrupos serem analisados, obtém-se

$$\sum_{i=1}^{50} \bar{x}_i = 1000 \quad \text{e} \quad \sum_{i=1}^{50} S_i = 75$$

- Calcule os limites de controle para os gráficos de controle \bar{X} e S .
- Quais são os limites naturais de tolerância do processo?
- Se os limites de especificação são 19 ± 4 , quais são as suas conclusões com relação à habilidade do processo em produzir itens de acordo com essas especificações?
- Supondo que, se um item excede o limite superior de especificação ele pode ser retrabalhado e se ele está abaixo do limite inferior de especificação ele tem que ser sucateado. Qual a percentagem de sucata e retrabalho que o processo está produzindo?
- Se o processo centrado em $\mu=19$, qual seria o efeito sobre as percentagens de sucata e retrabalho?