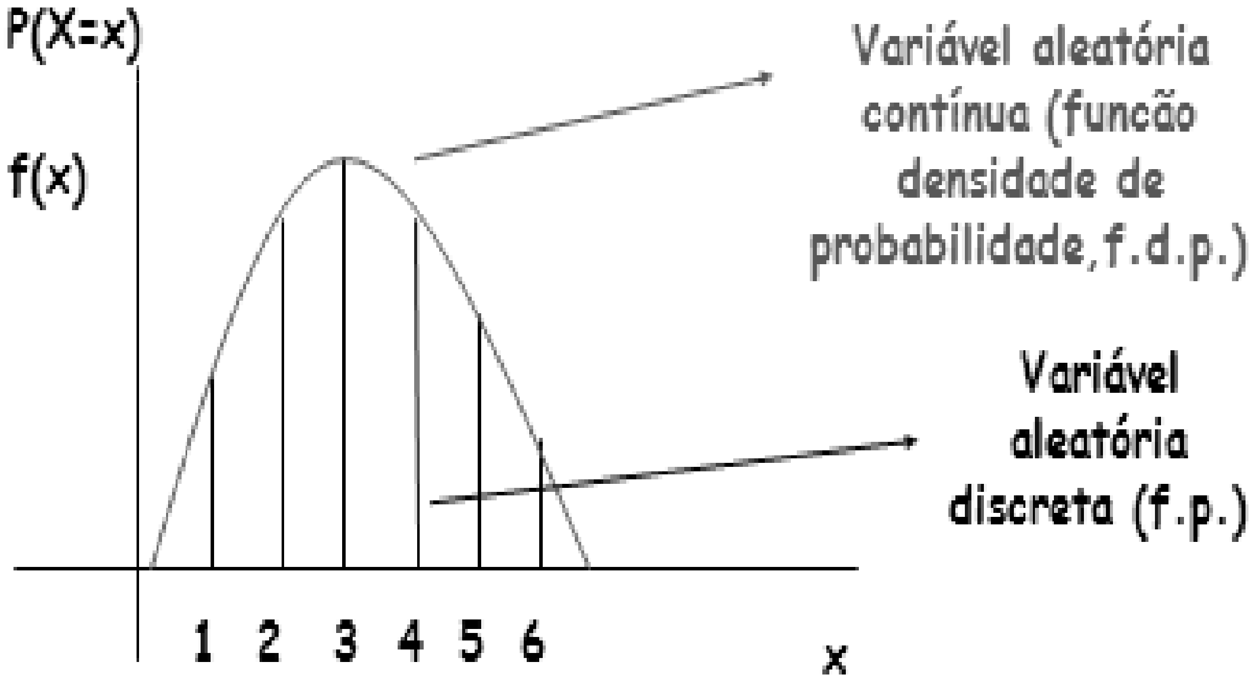
Distribuição Contínua Normal

Luiz Medeiros de Araujo Lima Filho
Departamento de Estatística – UFPB

Variável Aleatória Contínua:

- Assume valores num intervalo de números reais.
- Não é possível listar, individualmente, todos os possíveis valores de uma v.a. contínua.
- Associamos probabilidades a intervalos de valores da variável.



Propriedades dos Modelos Contínuos

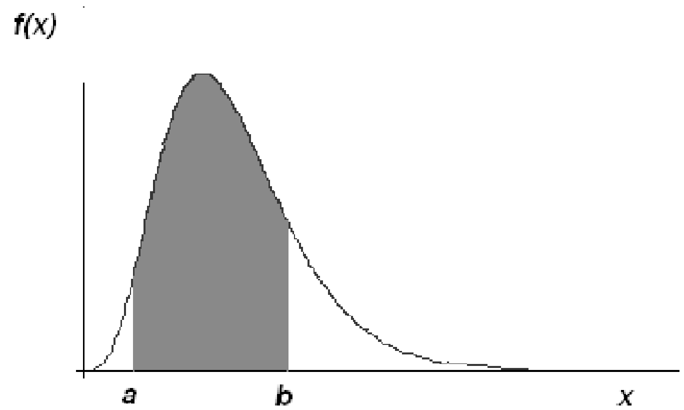
Uma v.a. X contínua é caracterizada por sua função densidade de probabilidade f(x) (f.d.p) com as propriedades:

(i) A área sob a curva de densidade é 1, isto é, $\int_R f(x)dx = 1$

(ii) $f(x) \geq 0$, para todo $x \in (-\infty, \infty)$;

(iii) $P(a \leq X \leq b)$ = área sob a curva da densidade f(x) e acima do eixo x, entre os pontos a e b;

(iv) $P(X = x_0) = 0$, para x_0 fixo.



Assim,

$P(a < X < b) = P(a \leq X < b)$

$= P(a < X \leq b) = P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)dx$

MÉDIA E VARIÂNCIA

Valor Esperado (média): Dada a v. a. X, o *valor esperado* ou *esperança matemática* de X é dada por

$$\mathbf{E(X)} = \int_{\Re} x f(x) dx$$

Notação: $\boldsymbol{\mu} = \mathbf{E(X)}$

Variância: É *o valor esperado da v.a.* $(X - E(X))^2$, *ou seja,*

$$\mathrm{Var(X)} = \int_{\Re} (\mathrm{x} - \mu)^2 f(x) dx = E(X^2) - (E(X))^2$$

Notação: $\sigma^2 = \mathrm{V}ar(\mathrm{X})$

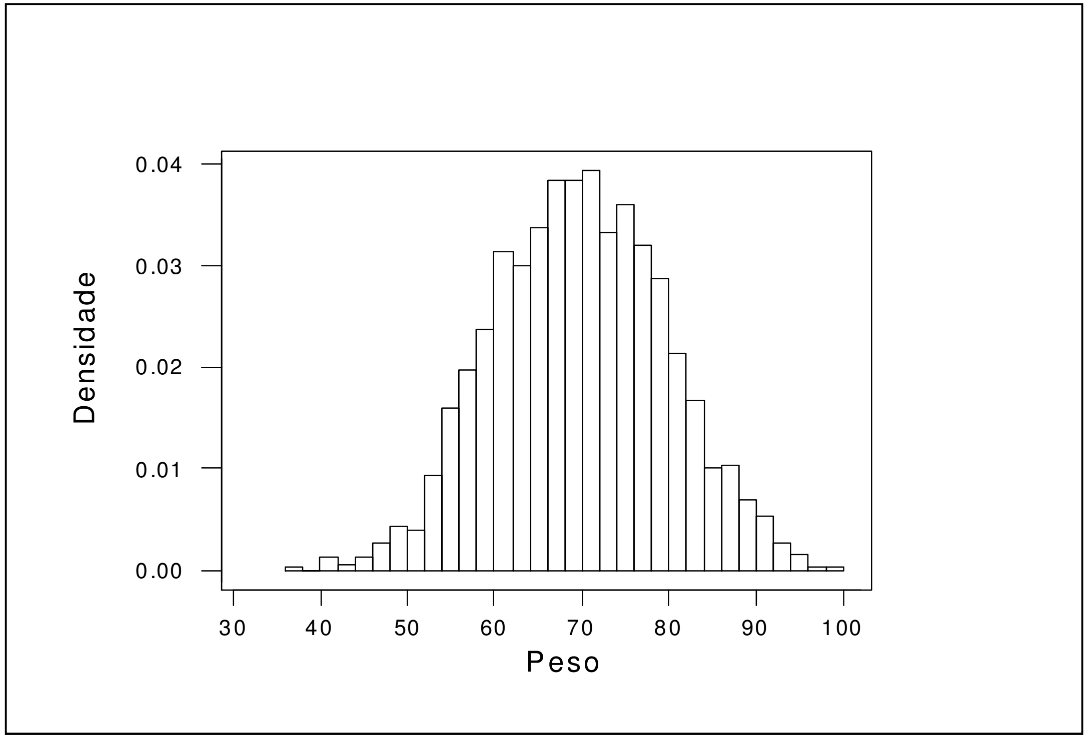
IMPORTÂNCIA DA DISTRIBUIÇÃO NORMAL

✓Retrata com boa aproximação, as distribuições de freqüência de muitos fenômenos naturais e físicos

✓Serve como aproximação da distribuição binomial quando n é grande

✓Representa a distribuição das médias e proporções em grandes amostras, o que tem relevante implicação na amostragem

Exemplo : Observamos o peso, em kg, de 1500 pessoas adultas selecionadas ao acaso em uma população.



- a distribuição dos valores é aproximadamente simétrica em torno de 70kg;

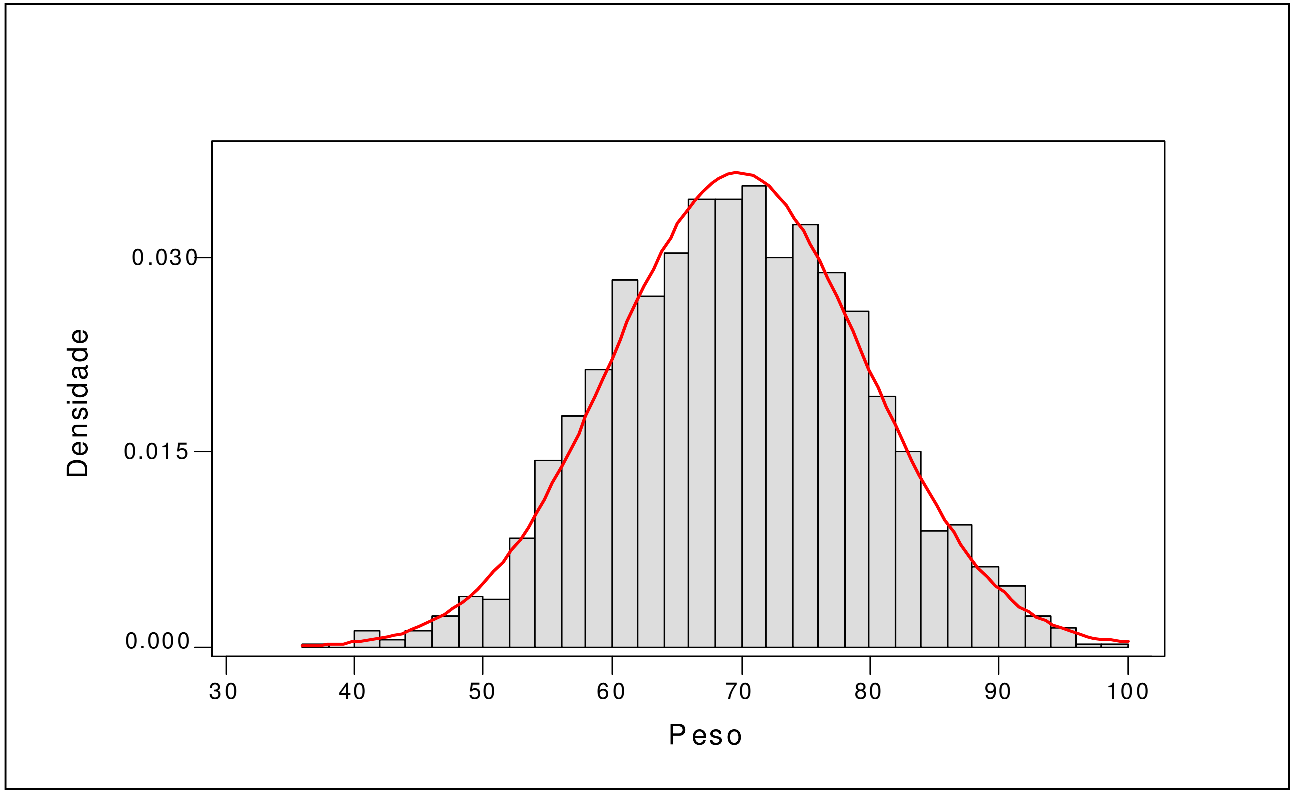
- a maioria dos valores (88%) encontra-se no intervalo (55;85);

- existe uma pequena proporção de valores abaixo de 48kg (1,2%) e acima de 92kg (1%).

Vamos definir a variável aleatória

***X*: peso, em kg, de uma pessoa adulta escolhida ao acaso da população.**

Como se distribuem os valores da variável aleatória *X*, isto é, qual a <u>distribuição de probabilidades</u> de *X* ?



A curva contínua da figura denomina-se *curva Normal.*

A distribuição Normal é uma das mais importantes distribuições <u>contínuas</u> de probabilidade pois:

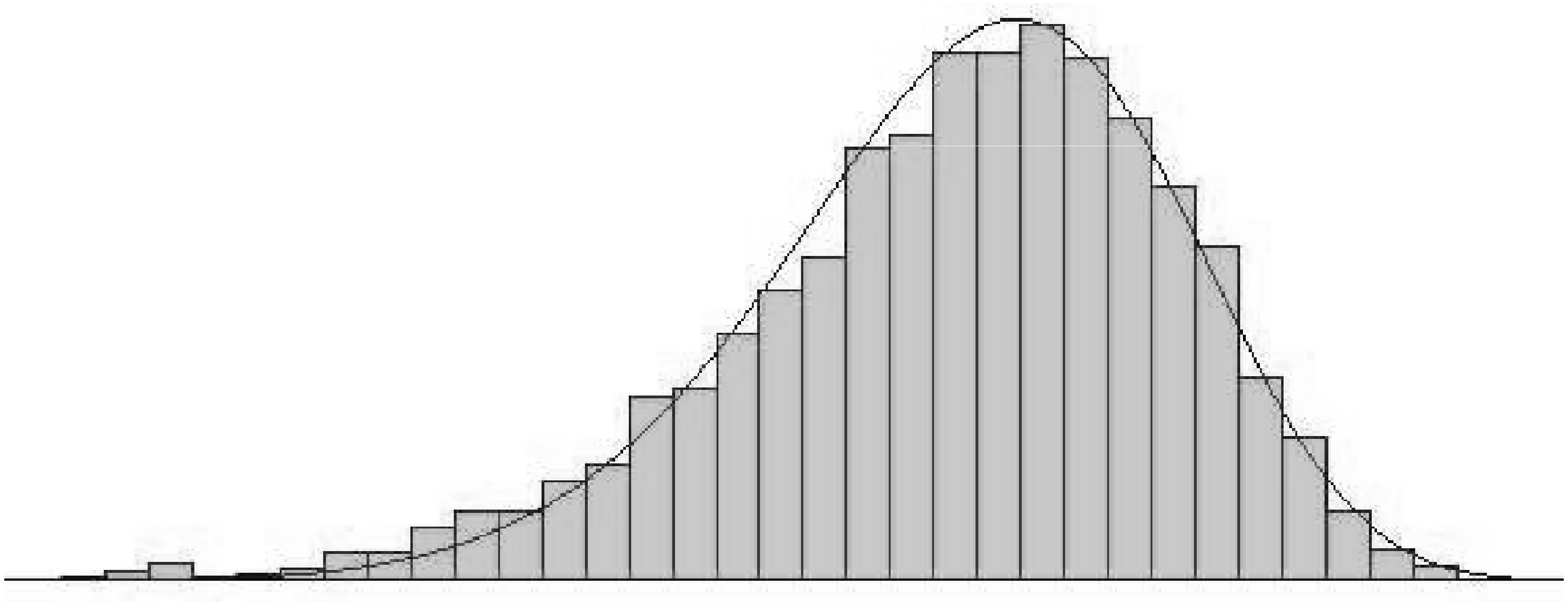
- **Muitos fenômenos aleatórios comportam-se de forma próxima a essa distribuição. Exemplos:**
    1. **altura;**
    2. **pressão sanguínea;**
    3. **peso.**

- **Pode ser utilizada para calcular, de forma aproximada, probabilidades para outras distribuições, como por exemplo, para a distribuição Binomial.**

Nem todos os fenômenos se ajustam à distribuição Normal.

Exemplo:
***Y*: Duração, em horas, de uma lâmpada de certa marca.**

A experiência sugere que esta distribuição deve ser *assimétrica*



A DISTRIBUIÇÃO NORMAL

A v. a. *X* tem <u>distribuição Normal</u> com parâmetros μ e σ^2 se sua função densidade de probabilidade é dada por

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}, \quad -\infty < x < \infty.$$

Pode ser mostrado que

1. **μ é o valor esperado (média) de *X* ($-\infty < \mu < \infty$);**

2. **σ^2 é a variância de *X* ($\sigma^2 > 0$).**

Notação : $X \sim N(\mu\,;\,\sigma^2)$

Obs: f(x) é simétrica em relação a μ.

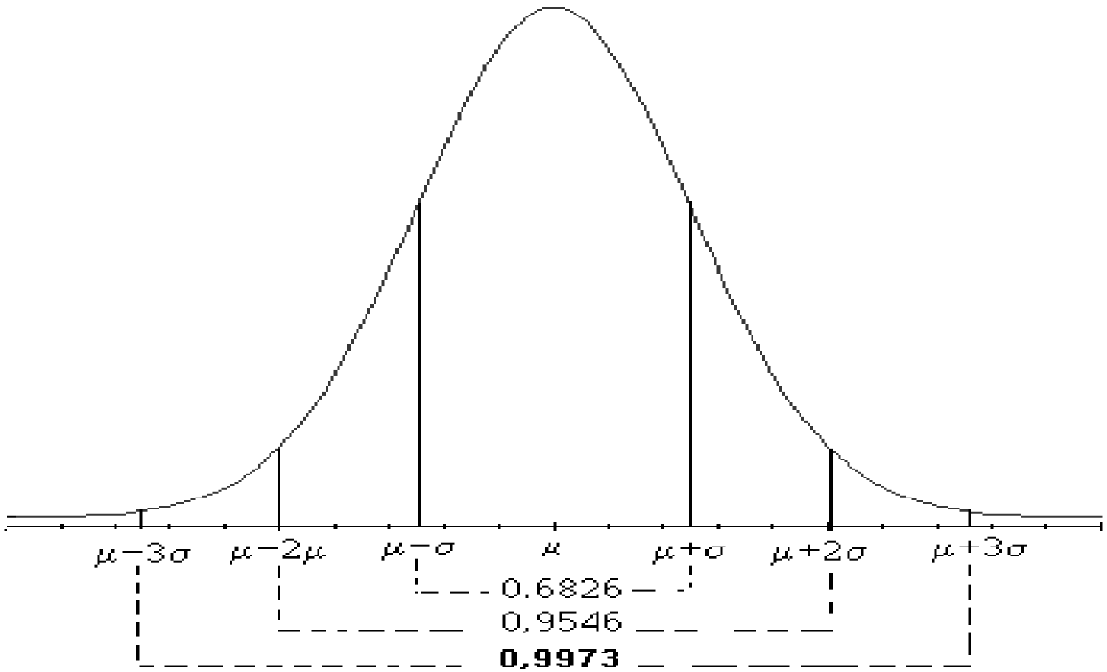
Propriedades da distribuição normal

$(a)\ E(X) = \mu, Var(X) = \sigma^2$

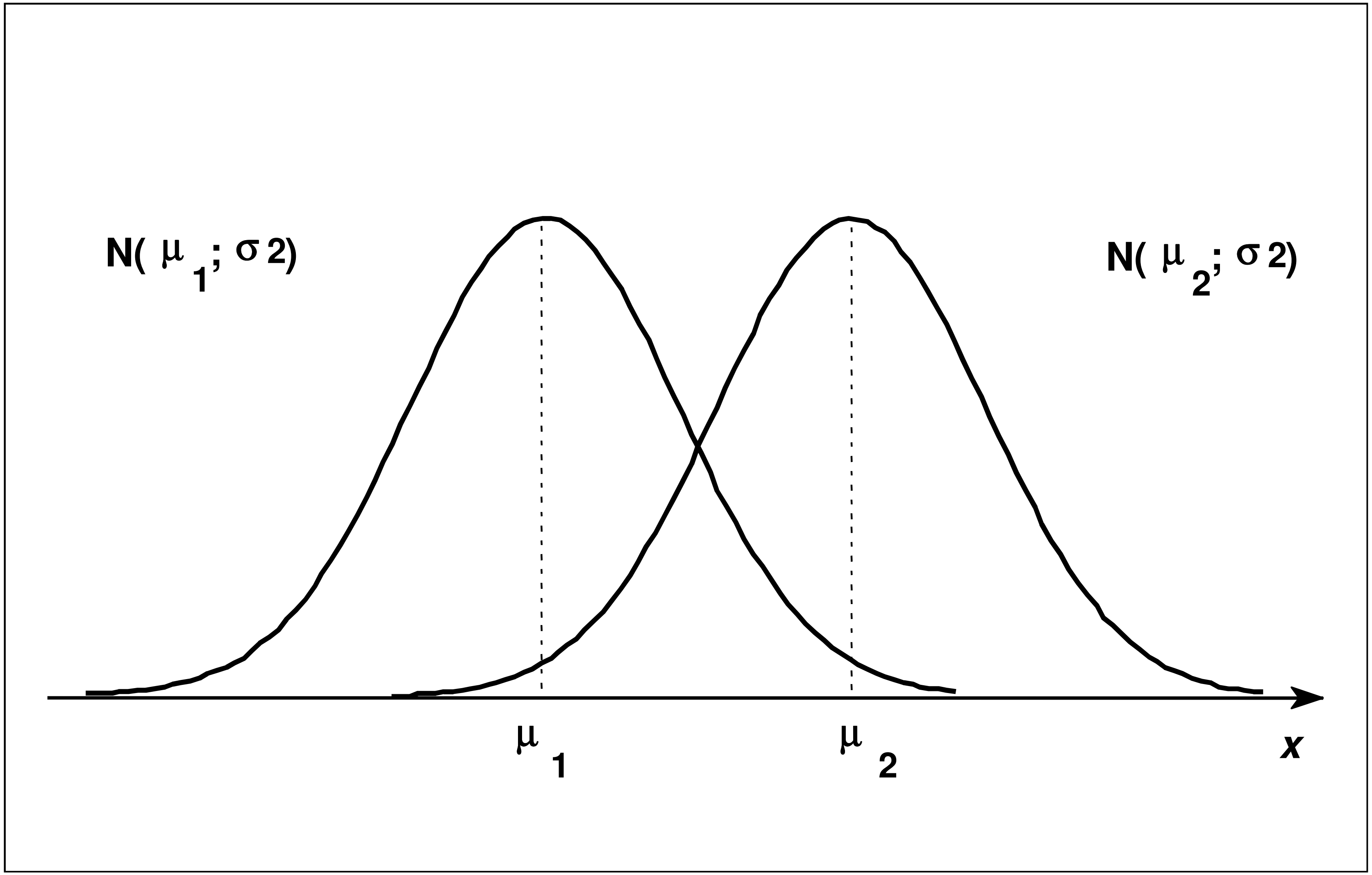
(b) A distribuição é simétrica em torno de sua média.

(c) A área total sob curva é igual a *um* portanto, cada metade da curva tem 0,5 da área total.

(d)
$$P(\mu - \sigma \leq X \leq \mu + \sigma) = 0,6896$$
$$P(\mu - 2\sigma \leq X \leq \mu + 2\sigma) = 0,9546$$
$$P(\mu - 3\sigma \leq X \leq \mu + 3\sigma) = 0,9973$$

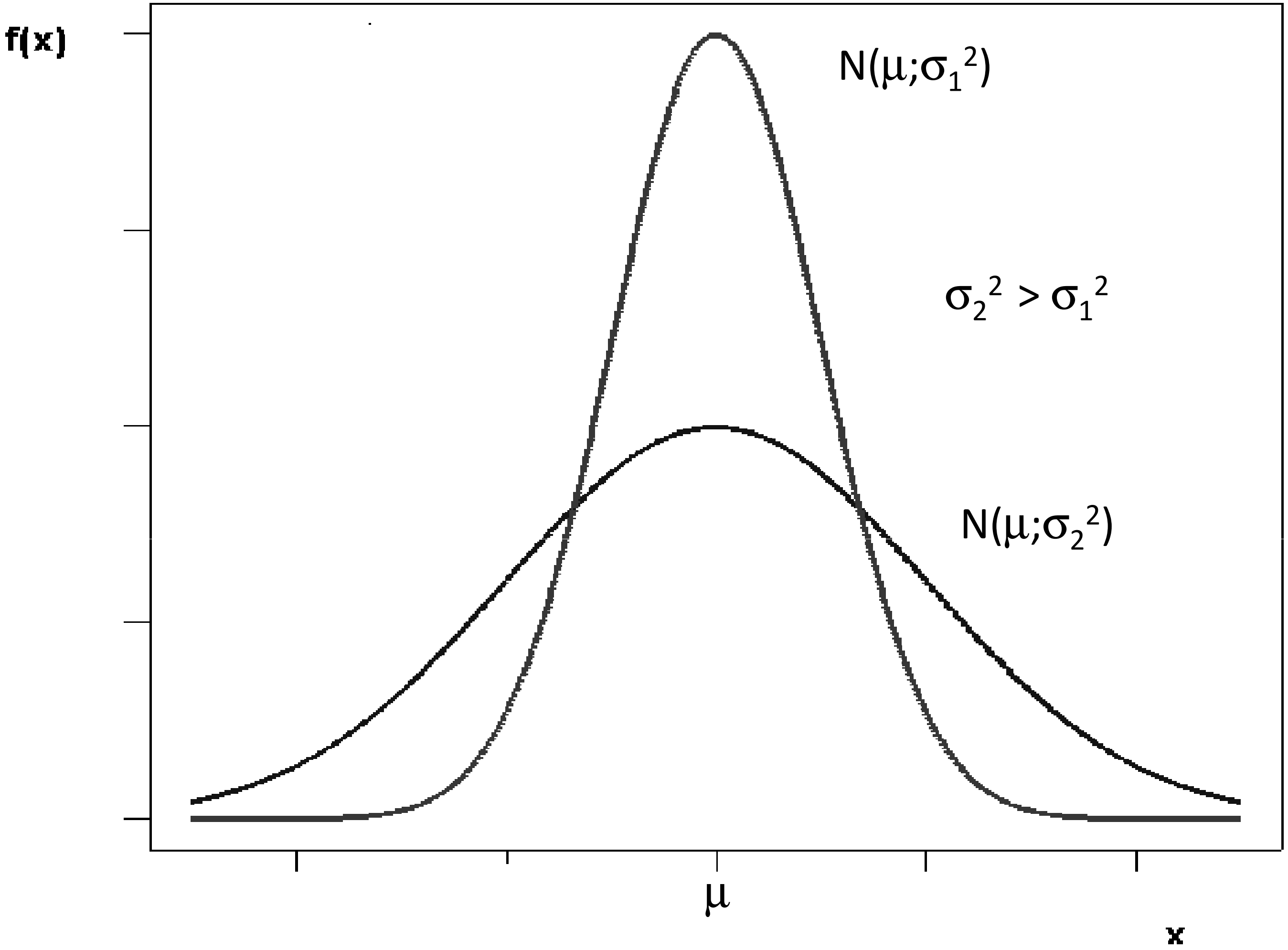


Influência de μ na curva Normal



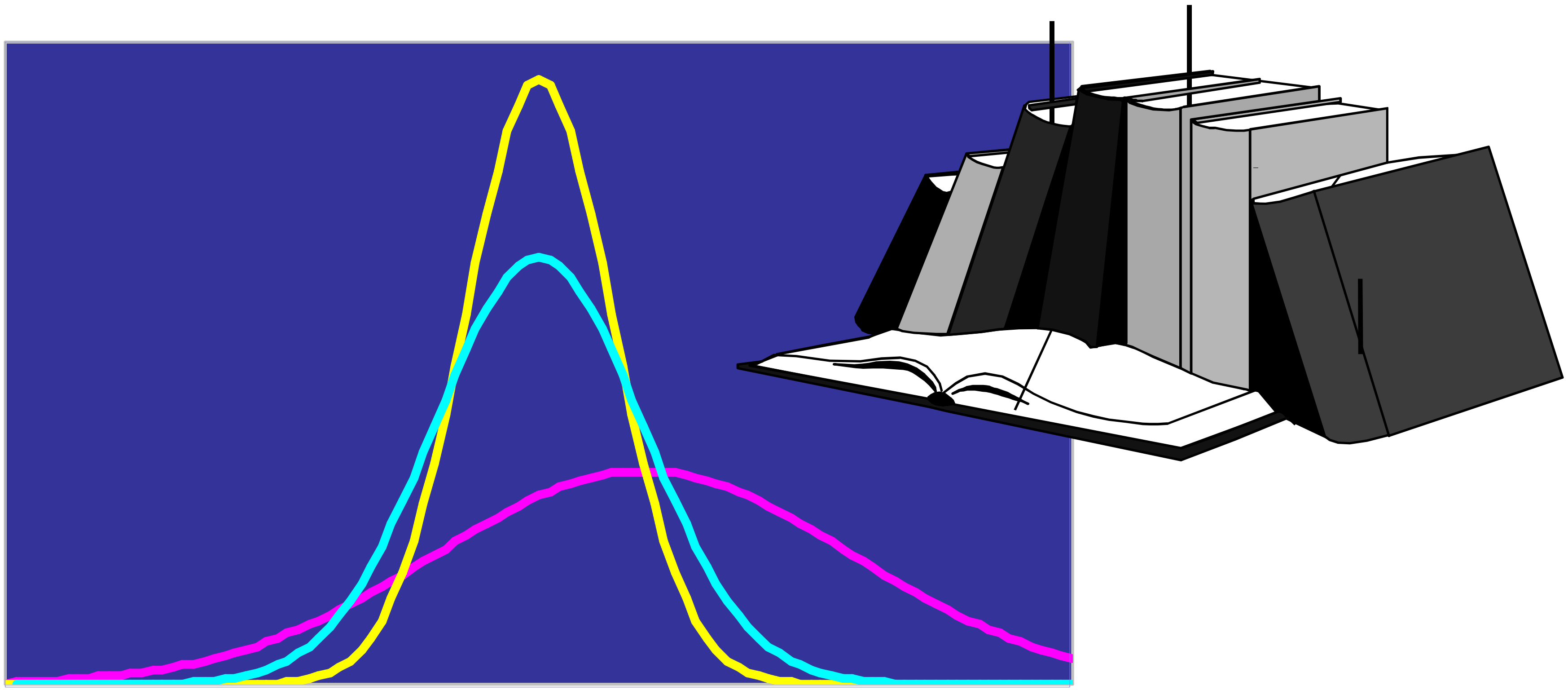
Curvas Normais com mesma variância σ^2
mas médias diferentes ($\mu_2 > \mu_1$).

Influência de σ^2 na curva Normal



Curvas Normais com mesma média μ,
mas com variâncias diferentes ($\sigma_2^2 > \sigma_1^2$).

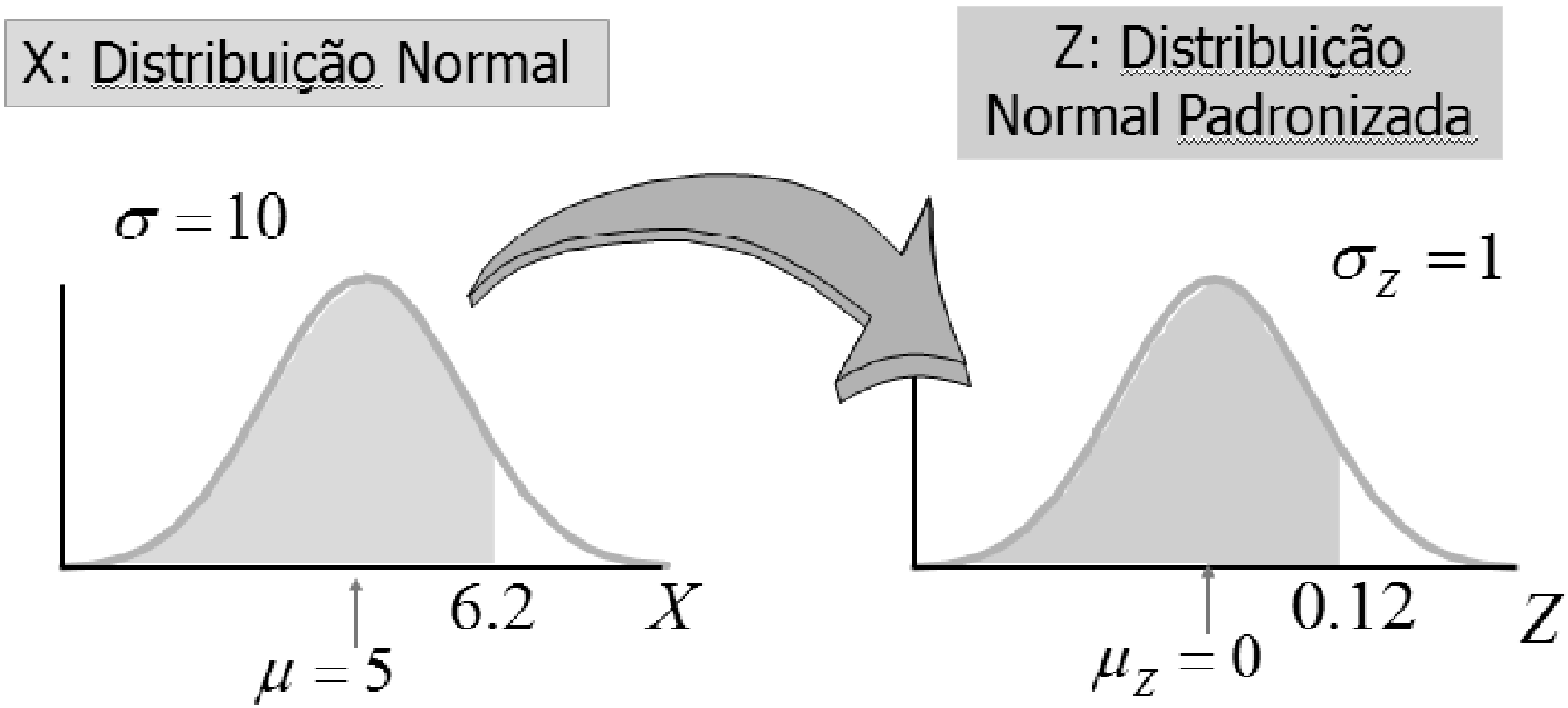
Qual Tabela usar?



Deveríamos ter disponíveis uma infinidade de Tabelas, uma para cada par σ e μ!

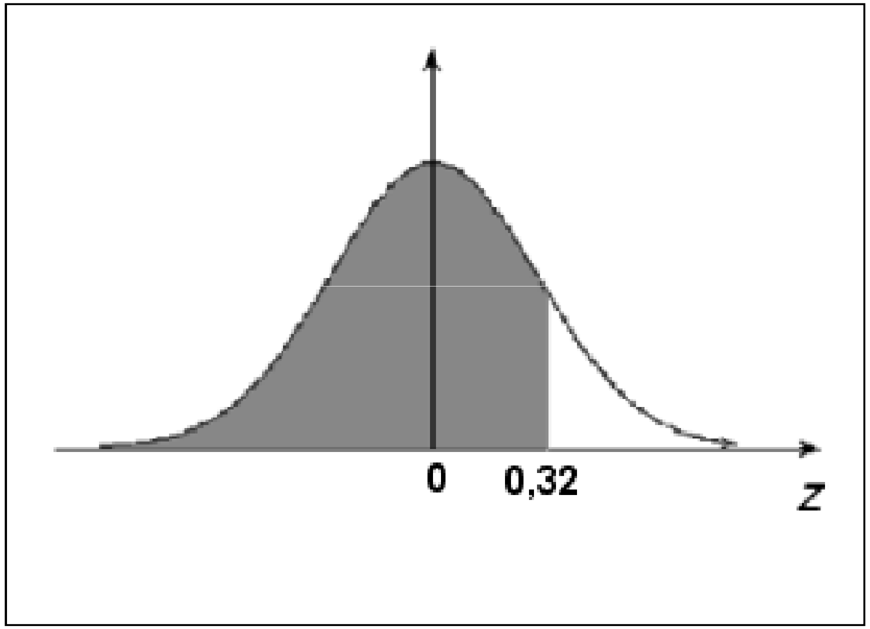
Se $X \sim N(\mu\ ; \sigma^2)$, definimos

$$\boxed{Z = \frac{X - \mu}{\sigma}}$$



Exemplo 1: Seja $Z \sim$ N (0; 1), calcular

a) P($Z \leq$ 0,32)

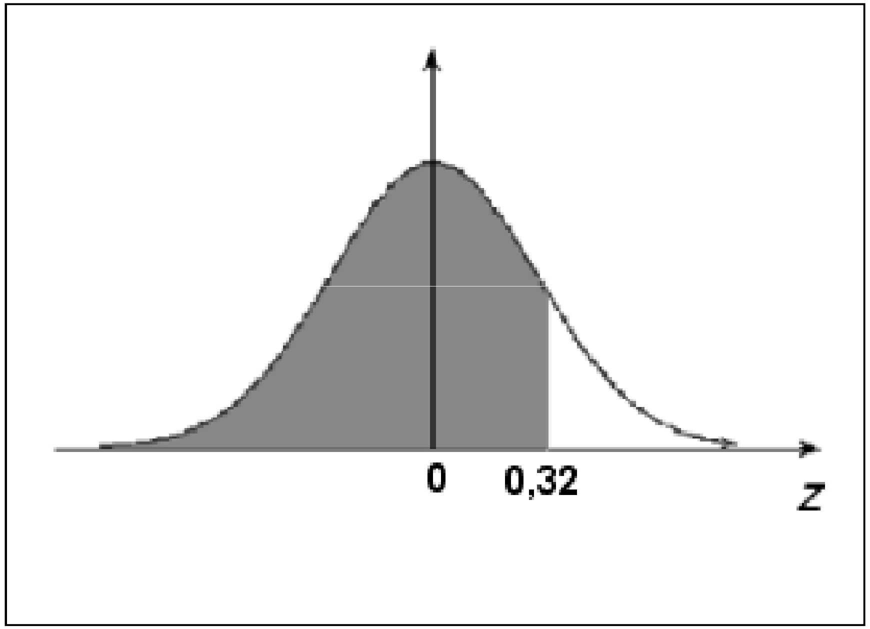


Encontrando o valor na Tabela N(0;1):

z	0	1	2
0,0	0,5000	0,5039	0,5079
0,1	0,5398	0,5437	0,5477
0,2	0,5792	0,5831	0,5870
0,3	0,6179	0,6217	0,6255
⋮	⋮	⋮	⋮

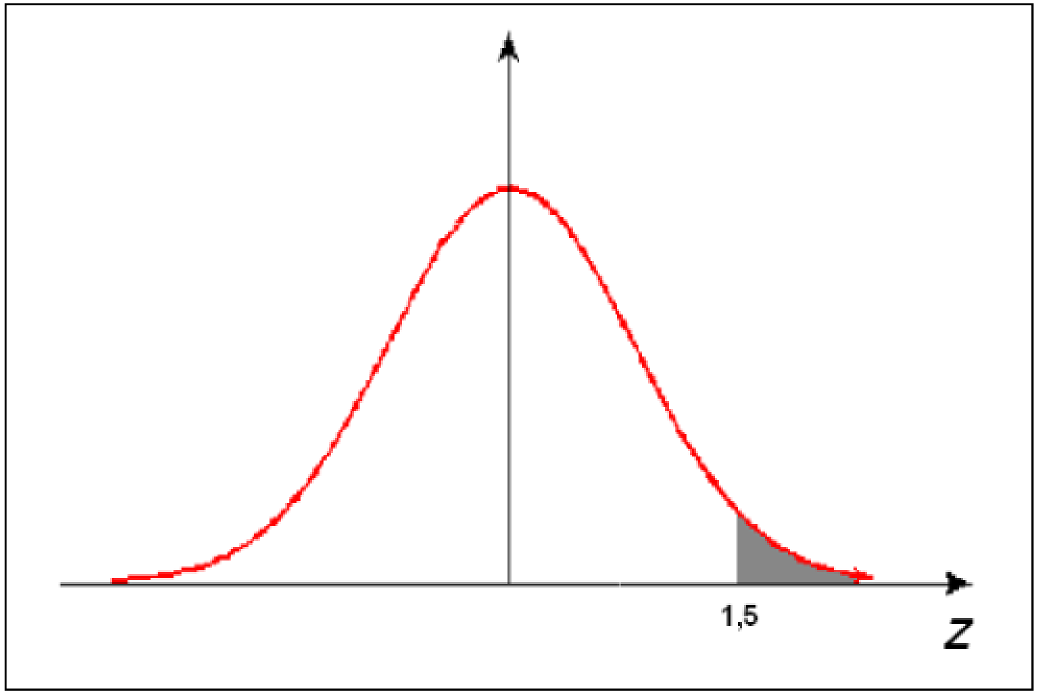
Exemplo 1: Seja $Z \sim N(0; 1)$, calcular

a) $P(Z \leq 0,32)$



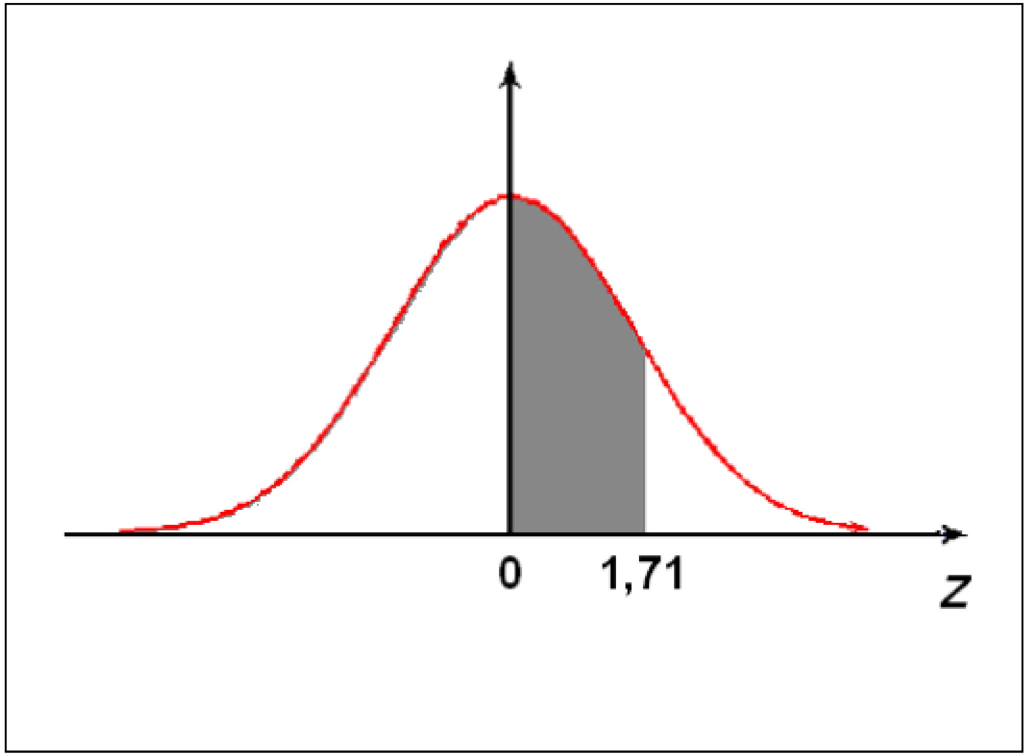
$P(Z \leq 0,32) = 0,6255.$

b) $P(Z \geq 1{,}5)$



$P(Z \geq 1{,}5) = 1 - P(Z < 1{,}5) = 1 - 0.9332 = 0{,}0668.$

c) $P(0 < Z \leq 1{,}71)$



$$P(0 < Z \leq 1{,}71) = P(Z \leq 1{,}71) - P(Z < 0) = 0{,}9564 - 0{,}5 = 0{,}4564$$

Exemplo

Uma grande empresa faz uso de milhares de lâmpadas elétricas que permanecem acessas continuamente. A vida de uma lâmpada pode ser considerada como uma variável aleatória normal com **vida média de 50 dias e desvio-padrão de 15 dias.** Se no dia 1º de agosto foram instaladas 8000 lâmpadas novas, aproximadamente quantas deverão ser substituídas no dia 1º de setembro?

A tabela da normal pode ser utilizada no sentindo inverso, isto é, dado uma certa probabilidade, desejamos obter o valor que a originou.

Qual o valor de z tal que $P(0 \leq Z \leq z)=0,4$?

$P(0 < Z \leq z) = 0,4$

$P(Z \leq z) - P(Z < 0) = 0,4$

$A(z) - 0,5 = 0,4$

$A(z) = 0,9$

O valor de z, tal que $A(z)=0,9$ é 1,28, ou seja

$z = 1,28$

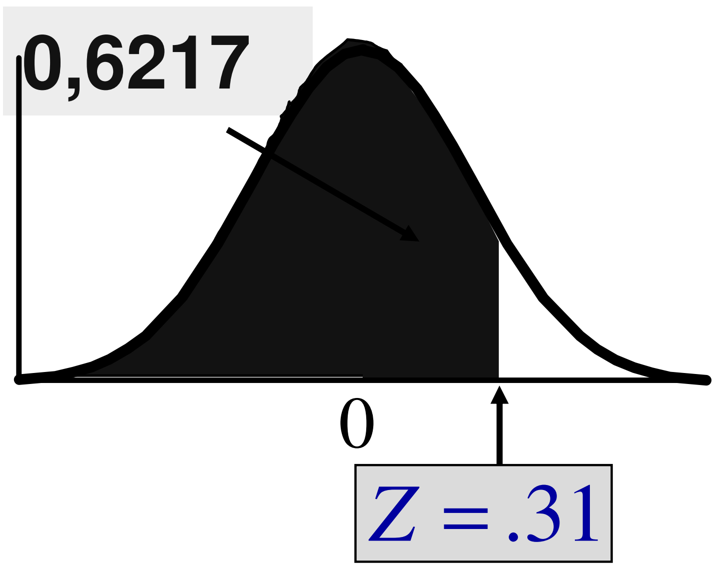
Encontrando Valores de Z
para Probabilidades conhecidas

Qual é Z associado à Probabilidade= 0,6217 ?

Distribuição Normal

Tabela (Parte)

$$\mu_Z = 0 \qquad \sigma_Z = 1$$



Z	.00	**.01**	0.2
0.0	.5000	.5040	.5080
0.1	.5398	.5438	.5478
0.2	.5793	.5832	.5871
0.3	.6179	**.6217**	.6255

Exemplo

A vida média de uma marca de televisão é de 8 anos com desvio-padrão de 1,8 anos. A campanha de lançamento diz que todos os produtos que tiverem defeito dentro do prazo de garantia serão substituídos por novos. Se você fosse o gerente de produção, qual seria o tempo de garantia que você especificaria para ter no máximo 5% de trocas.

Exemplo 4: O tempo gasto no exame vestibular de uma universidade tem distribuição Normal, com média 120 min e desvio padrão 15 min.

a) **Sorteando um aluno ao acaso, qual é a probabilidade que ele termine o exame antes de 100 minutos?**

b) **Qual deve ser o tempo de prova de modo a permitir que 95% dos vestibulandos terminem no prazo estipulado?**

c) **Qual é o intervalo central de tempo, tal que 80% dos estudantes gastam para completar o exame?**

Exemplo 6: Doentes, sofrendo de certa moléstia, são submetidos a um tratamento intensivo cujo tempo de cura foi modelado por uma densidade normal, de média 15 e desvio padrão 3 (em dias).

a) Que proporção desses pacientes demora mais de 17 dias para se recuperar?

b) Qual a probabilidade de um paciente, escolhido ao acaso, apresentar tempo de cura inferior a 20 dias?

c) Qual o tempo máximo necessário para a recuperação de 25% dos pacientes?

d) Considere um grupo de 100 pacientes escolhidos ao acaso, qual seria o número esperado de doentes curados em menos de 11 dias?