Cálculo das Probabilidades e Estatística I

Prof^{a}. Juliana Freitas Pires

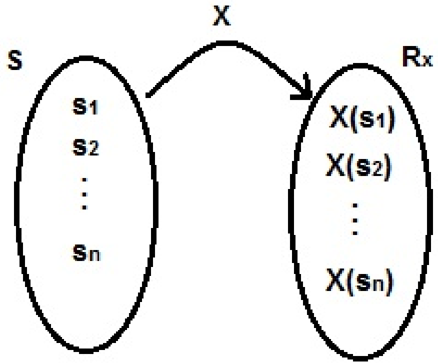
Departamento de Estatística
Universidade Federal da Paraíba - UFPB
juliana@de.ufpb.br

- Ao descrever um espaço amostral de um experimento, não necessariamente o resultado é um número.

- Contudo em muitas situações experimentais, estamos interessados na mensuração em forma de número.

- Uma maneira de solucionar esse problema é atribuir um número real x a todo elemento de S. Isto é, $x = X(s)$ em que X é uma função do espaço amostral em S.

Definição: Sejam E um experimento e S o espaço associado ao experimento. Uma função X, que associe a cada elemento $s \in S$ um número real $X(s)$ é denominada variável aleatória (v.a).

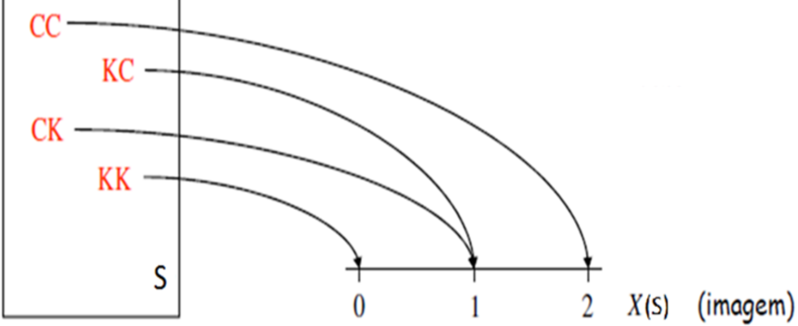


Observação: Como X é uma função, devemos lembrar que:

1. Cada elemento s de S corresponderá a exatamente um valor;
2. Diferentes valores $s \in S$, podem levar a um mesmo valor de X;
3. Nenhum elemento $s \in S$ poderá ficar sem valor de X.

Exemplo

X: número de caras em 2 lances de moeda



$$X(KK) = 0 \qquad P(X=0) = P(KK)$$
$$X(KC) = X(CK) = 1 \qquad P(X=1) = P(KC \cup CK)$$
$$X(CC) = 2 \qquad P(X=2) = P(CC)$$

Exemplo

Experimento (E): Em uma linha de produção selecionar três peças e observar se é perfeita ou defeituosa.

$$S = \{(PPP), (DDD), (PPD), (DPP),\\ (PDP), (PDD), (DPD), (DDP)\}.$$

$\mathbf{X}$: número de peças defeituosas nas três retiradas

$$R_x = \{0, 1, 2, 3\}$$

$\mathbf{X = 0} \rightarrow$ corresponde ao evento (PPP)
$\mathrm{P}(X = 0) = \mathrm{P}(PPP) = 1/8.$

$\mathbf{X = 1} \rightarrow$ corresponde a (PPD), (DPP) e (PDP)
$\mathrm{P}(X = 1) = \mathrm{P}[(PPD) \cup (DPP) \cup (PDP)] = 3/8.$

$\mathbf{X = 2} \rightarrow$ corresponde a (PDD), (DPD) e (DDP)
$\mathrm{P}(X = 2) = \mathrm{P}[(PDD) \cup (DPD) \cup (DDP)] = 3/8.$

$\mathbf{X = 3} \rightarrow$ corresponde a (DDD)
$\mathrm{P}(X = 3) = \mathrm{P}(DDD) = 1/8.$

Uma variável aleatória pode ser de dois tipos.

1. Discreta.
2. Contínua.

Variável Aleatória Discreta

Definição: Denomina-se X uma variável aleatória discreta se o número de valores possíveis de X for um conjunto de pontos finito ou infinito enumerável.

Exemplos:

- Número de ações vendidas de uma empresa.
- Número de erros de trasmissão em um processo.
- Número de aparelhos defeituosos em uma produção.

Função de Probabilidade

Definição: Seja X uma variável aleatória discreta. A cada possível resultado x_i associaremos um número $p_i = P(X = x_i)$, denominado probabilidade da variável aleatória X assumir o valor x_i, satisfazendo as seguintes condições:

i) $0 \leq p(x_i) \leq 1 \quad \forall i$

ii) $\sum p(x_i) = 1$.

A função P é denominada função de probabilidade.

Considere o experimento do lançamento de duas moedas. Seja a variável aleatória o número de caras obtidas. Construa a função de probabilidade X

Solução: X assume os seguintes valores

$$X = \{0, 1, 2\}.$$

Temos que,

$$P(X = 0) = P(K, K) = \frac{1}{4};$$

$$P(X = 1) = P(C, K) + P(K, C) = \frac{1}{2};$$

$$P(X = 2) = P(C, C) = \frac{1}{4}$$

Exemplo

Denotamos a função de probabilidade de X por

x_i	0	1	2
$\mathrm{P}(X = x_i)$	1/4	1/2	1/4

Definição: Dada uma variável aleatória discreta X, definimos $\mathrm{F}(x)$ a função de distribuição acumulada ou, simplesmente, função de distribuição (f.d) de X, dada por:

$$\mathrm{F}(x) = \mathrm{P}(X \leq x) \Rightarrow \mathrm{F}(x) = \sum_{x_i \leq x} \mathrm{P}(X = x_i)$$

Exemplo

Considerando o exemplo anterior, a função de probabilidade de X é denotada por:

x_i	0	1	2
$\mathrm{P}(X = x_i)$	1/4	1/2	1/4

Por conseguinte, a função de distribuição acumulada de X é dada por:

x_i	0	1	2
$\mathrm{F}(x_i) = \mathrm{P}(X \leq x_i)$	1/4	3/4	1

Exemplo (v.a discreta)

Um par de dados é lançado. Seja X a variável aleatória que associa a cada ponto (d_1, d_2) de S a soma desses números, isto é, $X(d_1, d_2) = d_1 + d_2$. Determine a função de probabilidade de X.

Solução:

O espaço amostral S é formado por 36 pares,

$$S = \{(1,1), (1,2), \ldots, (5,6), (6,6)\}.$$

Então, a variável aleatória $X = d_1 + d_2$ assume os seguintes valores

$$X = \{2, 3, 4, ..., 12\}.$$

Exemplo (v.a discreta)

A função de probabilidade de X é obtida da forma:

$$\mathrm{P}(X=2) = P(d_1=1, d_2=1) = \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6} = \frac{1}{36}$$

$$\mathrm{P}(X=3) = P(d_1=1, d_2=2) + P(d_1=2, d_2=1) = \frac{1}{36} + \frac{1}{36} = \frac{2}{36}$$

$$\vdots$$

$$\mathrm{P}(X=12) = P(d_1=6, d_2=6) = \frac{1}{36}$$

Logo, a função de probabilidade de X será representada por

x_i	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$\mathrm{P}(X=x_i)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

- A distribuição de probabilidades permite a definição de um modelo matemático apropriado a cada situação.
- Os modelos para v.a's discretas que estudaremos serão os Modelos Binomial e Poisson.
- No caso de v.a's contínuas a função de probabilidade dá lugar à função densidade de probabilidade que depende de conceitos matemáticos um pouco mais complexos (integrais).

Quando uma v.a é contínua, ela pode assumir qualquer valor em um dado intervalo.

Exemplos:

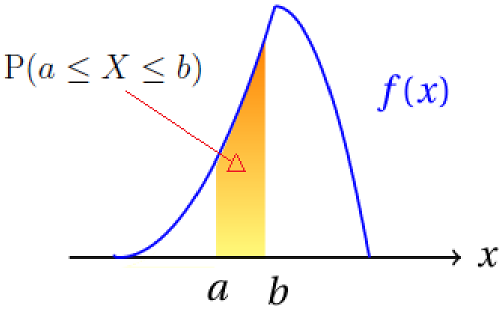
- resistência de um material;
- concentração de CO_2 na água
- tempo de vida de um componente eletrônico;
- tempo de resposta de um sistema computacional;

Função densidade de Probabilidade

Seja X uma variável aleatória contínua. A função de densidade de probabilidade (f.d.p.) $f(x)$ é uma função que satisfaz as seguintes condições:

1. $f(x) \geq 0, \quad \forall x \in R_x$
2. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$
3. Sejam a e b quaisquer no intervalo, $-\infty < a < b < +\infty$ temos que
$$\mathrm{P}(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)dx$$

- $\mathrm{P}(a \leq X \leq b)$ representa a área sob a curva da função densidade de probabilidade $f(x)$.



Observações

- Para qualquer valor específico de X, digamos x_0, $\mathrm{P}(X = x_0) = 0$, pois

$$\mathrm{P}(X = x_0) = \int_{x_0}^{x_0} f(x)dx = 0$$

- Como a probabilidade de X assumir valores em pontos isolados é nula, temos que

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(a \leq X \leq b) =& \mathrm{P}(a \leq X < b) \\ &= \mathrm{P}(a < X \leq b) = \mathrm{P}(a < X < b)\end{aligned}$$

Função de Distribuição

- A definição de função de distribuição para o caso contínuo é dada por

$$\mathrm{F}(x) = \mathrm{P}(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx$$

Exemplo (v.a contínua)

- Suponha que X é uma variável aleatória contínua com a seguinte fdp:

$$f(x) = \begin{cases} 2x, & 0 < x < 1 \\ 0 & \text{caso contário} \end{cases}$$

a) Mostre que $f(x)$ é uma fdp;

b) Calcule $\mathrm{P}(X \leq 1/2)$;

c) Calcule $\mathrm{P}(X \leq 1/2 \mid 1/3 \leq X \leq 2/3)$;

d) Se $f(x)$ for uma fdp, calcule sua função de distribuição acumulada.

Solução:

a) Para que $f(x)$ seja uma fdp basta verificar que

$$\int_0^1 2x dx = x^2 \Big|_0^1 = 1.$$

b) $P(X \leq 1/2) = \displaystyle\int_0^{1/2} 2x dx = x^2 \Big|_0^{1/2} = 1/4.$

c) $$P(X \leq 1/2 \mid 1/3 \leq X \leq 2/3) = \frac{P(1/3 \leq X \leq 1/2)}{P(1/3 \leq X \leq 2/3)}$$

$$= \frac{\displaystyle\int_{1/3}^{1/2} 2x dx}{\displaystyle\int_{1/3}^{2/3} 2x dx} = \frac{5/36}{1/3} = \frac{5}{12}.$$

Solução:

d)

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ \displaystyle\int_0^x 2x dx = x^2, & 0 < x < 1 \\ 1 & x \geq 1 \end{cases}$$

Considerações

- Existem diversos modelos para v.a's contínuas.
- Lidaremos com o modelo denominado Normal, o qual é apropriado a diversas situações nas mais diferentes áreas.

Valor Esperado de uma Variável Aleatória

- Nos modelos probabilísticos, parâmetros podem ser empregados para caracterizar sua distribuição de probabilidade. Dada uma distribuição de probabilidade é possível associar certos parâmetros, os quais fornecem informação valiosa sobre tal distribuição.
- Um dos parâmetros mais importantes é o valor esperado (esperança ou média) de uma variável aleatória X, denotado por $\mathrm{E}(X)$ ou μ.

Valor Esperado de uma v.a Discreta

- Seja X uma variável aleatória **discreta** com possíveis valores $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$. Seja $p(x_i) = \mathrm{P}(X = x_i)$, $i = 1, 2, \ldots, n, \ldots$. Então, o valor esperado ou média da variável aleatória X é definido por:

$$\mu = \mathrm{E}(X) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i p(x_i)$$

se a série convergir.

Valor Esperado de uma v.a Contínua

- Seja X uma variável aleatória **contínua** com fdp $f(x)$. O valor esperado de X será definido por

$$\mu = \mathrm{E}(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx.$$

Exemplo (v.a discreta)

Considere o exemplo do lançamento de duas moedas, onde a variável aleatória X = número de caras obtidas no lançamento de 2 moedas. Relembrando que a função de probabilidade é:

x_i	0	1	2
$p(x_i)$	1/4	1/2	1/4

obtemos a $\mathrm{E}(X)$ por

$$\mathrm{E}(X) = \sum_{i=1}^{3} x_i p(x_i) = \left(0 \times \frac{1}{4}\right) + \left(1 \times \frac{1}{2}\right) + \left(2 \times \frac{1}{4}\right) = 1$$

Obs: isto representa que, ao lançarmos 2 moedas esperamos que, em média, em um dos lançamentos apareça uma *Cara*.

Exemplo (v.a contínua)

Considere a variável aleatória contínua do exemplo anterior, com a seguinte fdp:

$$f(x) = \begin{cases} 2x, & 0 < x < 1 \\ 0, & \text{caso contário} \end{cases}$$

obtemos a $\mathrm{E}(X)$ por

$$\mathrm{E}(X) = \int_0^1 x(2x)dx = \int_0^1 2x^2 dx = \frac{2x^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{2}{3}$$

Propriedades da Esperança

Seja X uma v.a e c uma constante, então:

- O valor esperado (média) de uma constante é a própria constante:

$$\mathrm{E}(c) = c.$$

- Multiplicando-se c por uma variável aleatória X, sua média fica multiplicada por esta constante:

$$\mathrm{E}(cX) = c\mathrm{E}(X).$$

- Somando ou subtraindo c de uma variável aleatória X, sua média fica somada ou subtraída desta constante:

$$\mathrm{E}(X \pm c) = \mathrm{E}(X) \pm c.$$

Propriedades da Esperança

- Sejam X e Y duas variáveis aleatórias, o valor esperado da soma/subtração de variáveis aleatórias equivale a soma/subtração dos valores esperados de X e Y:

$$\mathrm{E}(X \pm Y) = \mathrm{E}(X) \pm \mathrm{E}(Y).$$

- Sejam X e Y duas variáveis aleatórias independentes, temos que :

$$\mathrm{E}(XY) = \mathrm{E}(X)\mathrm{E}(Y).$$

Esperança da função de uma v.a.

- Toda função de uma v.a X, também é uma variável aleatória. Logo, podemos falar na esperança de X^2, $2X+1$, entre outras. Assim,

  Se X é discreta $\Rightarrow \mathrm{E}(X^2) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i^2 p(x_i)$.

  Se X é contínua $\Rightarrow \mathrm{E}(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) dx$.

Variância de uma v.a

Um outro parâmetro importante que caracteriza uma variável aleatória é a variância.

A variância fornece a dispersão dos valores da variável em relação ao valor esperado.

Definição: Seja X uma variável aleatória (discreta ou contínua)com esperança dada por $\mathrm{E}(X)$. A variância de X é definida por

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(X) &= \mathrm{E}(X-\mu)^2 \\ &= \mathrm{E}(X^2) - [\mathrm{E}(X)]^2\end{aligned}$$

Observações

- **Notação:** $\text{Var}(X) = \sigma^2$
- A variância é sempre positiva, $\text{Var}(X) \geq 0$.
- $\text{Var}(X)$ é expressa em unidades quadradas (o que torna difícil a sua interpretação).

Desvio Padrão: É definido como a raiz quadrada positiva da variância, isto é,

$$\sigma = \mathrm{DP}(X) = \sqrt{\mathrm{Var}(X)}$$

Obs: O desvio padrão mede a dispersão absoluta de X, sendo expressa na mesma unidade da variável aleatória X.

Propriedades da Variância

Sejam X uma v.a. e c é constante, então

- A variância de uma constante é zero:

$$\mathrm{Var}(c) = 0;$$

- Somando-se ou subtraindo-se uma constante à variável aleatória, sua variância não se altera:

$$\mathrm{Var}(c \pm X) = \mathrm{Var}(X).$$

- Multiplicando-se c por uma v.a X, sua variância fica multiplicada pelo quadrado da constante:

$$\mathrm{Var}(cX) = c^2\mathrm{Var}(X).$$

Propriedades da Variância

- Sejam X e Y duas variáveis aleatórias **independentes**, a variância da soma/subtração de variáveis aleatórias equivale a soma das variâncias de X e Y:

$$\mathrm{Var}(X \pm Y) = \mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(Y).$$

Exemplo (v.a discreta)

Considerando a variável aleatória discreta X com função de probabilidade dada por:

x_i	0	1	2
$p(x_i)$	1/4	1/2	1/4

Calcule a $\text{Var}(X)$.

Solução: $\text{Var}(X) = \text{E}(X^2) - [\text{E}(X)]^2$

$\text{E}(X) = \sum_{i=1}^{3} x_i p(x_i) = \left(0 \times \frac{1}{4}\right) + \left(1 \times \frac{1}{2}\right) + \left(2 \times \frac{1}{4}\right) = 1$

$\text{E}(X^2) = \sum_{i=1}^{3} x_i^2 p(x_i) = \left(0^2 \times \frac{1}{4}\right) + \left(1^2 \times \frac{1}{2}\right) + \left(2^2 \times \frac{1}{4}\right) = \frac{3}{2}$

$\text{Var}(X) = \frac{3}{2} - 1^2 = \frac{1}{2}$

Exemplo (v.a contínua)

Seja X uma variável aleatória contínua com a seguinte função de densidade:

$$f(x) = \begin{cases} 2x, & 0 < x < 1 \\ 0, & \text{caso contário} \end{cases}$$

Calcular $\text{Var}(X)$. **Solução:** $\text{Var}(X) = \text{E}(X^2) - [\text{E}(X)]^2$

$\text{E}(X) = \int_0^1 x(2x)dx = \int_0^1 2x^2dx = \frac{2x^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{2}{3}$

$\text{E}(X^2) = \int_0^1 x^2(2x)dx = \int_0^1 2x^3dx = \frac{x^4}{2}\Big|_0^1 = \frac{1}{2}$

$\text{Var}(X) = \frac{1}{2} - \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{1}{18}$

Exemplo (v.a discreta)

Uma livraria mantém os registros das vendas diárias dos livros. Com os dados construiu a seguinte distribuição de probabilidade da variável aleatória X = número de livros vendidos por semana:

x_i	0	1	2	3	4	5
$p(x_i)$	$0,05$	$0,15$	$0,42$	$0,2$	$0,08$	$0,1$

a) Calcule a probabilidade de vender mais que 2 livros por semana.
b) Calcule a probabilidade de vender no máximo um livro.
c) Calcule o número esperado de livros vendidos por semana.
d) Calcule a variância dos livros vendidos por semana.
e) Seja $Y = 3X^2 + X - 2$ o lucro da livraria em função dos livros vendidos. Qual o lucro esperado da livraria?

Solução:

a) $$\begin{aligned} \mathrm{P}(X > 2) &= \mathrm{P}(X = 3) + \mathrm{P}(X = 4) + \mathrm{P}(X = 5) \\ &= 0,2 + 0,08 + 0,1 = 0,38 \end{aligned}$$

b) $\mathrm{P}(X \leq 1) = \mathrm{P}(X = 0) + \mathrm{P}(X = 1) = 0,05 + 0,15 = 0,2$

c) $$\begin{aligned} \mathrm{E}(X) = &(0 \times 0,05) + (1 \times 0,15) + (2 \times 0,42) + (3 \times 0,2) \\ &+(4 \times 0,08) + (5 \times 0,1) = 2,41 \end{aligned}$$

d) $$\begin{aligned} \mathrm{E}(X^2) = &(0^2 \times 0,05) + (1^2 \times 0,15) + (2^2 \times 0,42) + (3^2 \times 0,2) \\ &+(4^2 \times 0,08) + (5^2 \times 0,1) = 7,41 \end{aligned}$$

$\mathrm{Var}(X) = \mathrm{E}(X^2) - [\mathrm{E}(X)]^2 = 1,6$

c) $$\begin{aligned} \mathrm{E}(Y) &= \mathrm{E}(3X^2 + X - 2) = \mathrm{E}(3X^2) + \mathrm{E}(X) + \mathrm{E}(-2) \\ &= 3 * \mathrm{E}(X^2) + \mathrm{E}(X) - 2 = 3 * 7,41 + 2,41 - 2 = 22,64 \end{aligned}$$

Exemplo (v.a contínua)

O tempo (em anos) adequado de troca de uma peça de certa marca de computador é uma v.a. com a seguinte função densidade:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{8}, & 0 \leq x \leq 4 \\ 0 & \text{caso contário} \end{cases}$$

a) Qual a probabilidade de um computador necessitar da troca da peça antes de um ano de uso?
b) Cacule o tempo médio de troca de uma peça de certa marca de computador.
c) Cacule a variância do tempo de troca de uma peça de certa marca de computador.
d) Seja $Y = (X - 2)^2$ o prejuízo da empresa em função do tempo de troca. Qual o prejuízo esperado?

Solução:

a) $P(X < 1) = \int_0^1 \frac{x}{8}dx = \left.\frac{x^2}{16}\right|_0^1 = \frac{1}{16} = 0,0625$

b) $E(X) = \int_0^4 x\frac{x}{8}dx = \int_0^4 \frac{x^2}{8}dx = \left.\frac{x^3}{24}\right|_0^4 = \frac{8}{3}$

c) $E(X^2) = \int_0^4 x^2\frac{x}{8}dx = \int_0^4 \frac{x^3}{8}dx = \left.\frac{x^4}{32}\right|_0^4 = 8$

$\mathrm{Var}(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = 8 - \left(\frac{8}{3}\right)^2 = \frac{8}{9}$

d) $E(Y) = E\left[(X-2)^2\right] = E(X^2 - 4X + 4)$
$= E(X^2) - 4 * E(X) + E(4) = 1,33$