Estatística Nebulosa. O que é isso? Parte I - Conjuntos Nebulosos

Ronei Marcos de Moraes
Departamento de Estatística / CCEN / UFPb
João Pessoa - PB
ccende02@brufpb.bitnet

set/93

Abstract

Dando início a uma série de publicações introdutórias a respeito da Estatística Nebulosa, este relatório introduz conceios básicos a respeito dos Conjuntos Nebulosos, incentivando o leitor a refletir sobre essas "novidades conceituais".

Palavras Chaves. Teoria dos Conjuntos; Teoria dos Conjuntos Nebulosos.

1 Introdução

As origens dos "Conjuntos Nebulosos", remontam ao ano de 1962, quando o professor Lofti A. Zadeh publicou um artigo denominado "From Circuit Theory to Systems Theory", alertando para o que chamou de "Mathematics of fuzzy or cloudy quanties wich are not describable in terms of probability distribuitions" quando, pela primeira vez, o termo "fuzzy" foi empregado. Em seguida, em 1965, o próprio Zadeh publicaria um artigo que é considerado o marco-zero da teoria: "Fuzzy Sets", onde lança as bases matemáticas desse tipo de conjunto. A partir daí, inúmeras aplicações e destinos têm sido dados a essa teoria, nos mais variados campos como estatística, inteligência artificial, reconhecimento de padrões, programação linear, entre muitos outros.

Duarte Filho (1988) alerta, no entanto, que as diversas teorias surgidas para avaliar subjetividades, conseguiram somente avaliar alguns aspectos do problema geral, não obtendo inclusão de suas soluções em quaisquer das demais teorias.

A Teoria dos Conjuntos Nebulosos teve na estatística, em particular, uma preocupação quase que imediata - observa-se a preocupação da primeira publicação de Zadeh citada - de modo que em 1968 novamente Zadeh aborda o assunto, publicando o artigo entitulado: "Probability measures of fuzzy events". Isto é bastante óbvio pois, se alteramos a filosofia dos conjuntos, então alteramos também os conceitos da probabilidade. Mas antes de prosseguirmos nessa verdadeira viagem, cabe muito bem a pergunta: O que são "fuzzy sets" ou conjuntos nebulosos?

2 O que são "fuzzy sets".

Para conseguir clarear a situação, tomemos um exemplo [Zadeh(1965)]: quem pertence à classe dos números reais muito maiores que um? Ou à classe das mulheres bonitas? Ou ainda à classe das ruas largas? É claro que cada pessoa responderá a essas perguntas de modo *subjetivo*. E então como formular conjuntos na matemática usual para esses conjuntos? Como impô-los limites?

A esses conjuntos acima citados podemos chamá-los de *conjuntos nebulosos*. O fato de que estes conjuntos não tenham limites verdadeiramente definidos, faz com que seja necessário a introdução de um outro conceito que é o de *função de pertinência*. Por exemplo propondo-se uma ordem decrescente de beleza em algumas mulheres famosas, poderemos encontrar alguém que concorde com a seguinte opinião:

Exemplo I.1:

Luíza Brunet < Luíza Tomé < Angélica < Suzy Rêgo < Bruna Lombardi < Sônia Lima < Maria Zilda < Wilza Carla.

Possivelmente alguém dirá que A, B ou C é feia demais para estar nessa lista, ou ainda que fulana é mais bela que beltrana e assim vai ...

Se pensássemos em termos de um número inteiro próximo de cinco, as opiniões poderiam ser:

Exemplo I.2:

números no intervalo $[4; 6]$ ou ainda

números no intervalo $[3; 7]$ ou ainda

números no intervalo $[2;8]$.

Cada qual definiu sem saber, uma função de pertinência para ambas as questões. No entanto, apesar de bastante intuitivo, como poderemos definir matematicamente uma função deste tipo?

Vejamos: Seja A definido como conjunto de mulheres bonitas, então:

$$\begin{aligned}\mu_A(x) &= \frac{1,0}{\text{Luíza Brunet}} + \frac{0,9}{\text{Luíza Tomé}} + \frac{0,8}{\text{Angélica}} + \frac{0,65}{\text{Suzy Rêgo}} + \\ &+ \frac{0,6}{\text{Bruna Lombardi}} + \frac{0,5}{\text{Sônia Lima}} + \frac{0,3}{\text{Maria Zilda}} + \frac{0,0}{\text{Wilza Carla}}\end{aligned}$$

onde os valores do numerador significam graus de pertinência entre 0 e 1 e '+' significa união de elementos do conjunto mulheres bonitas. Traduzindo: Luíza Brunet pertence ao conjunto de belas mulheres integralmente; Luíza Tomé pertence não totalmente, mas 0,9; e assim por diante até que Maria Zilda está com um grau de pertinência de apenas 0,3, ou seja está quase fora do conjunto e Wilza Carla que está definitivamente fora do conjunto de belas mulheres. No entanto, não se pode afirmar que quaisquer dessas mulheres estão dentro ou fora do conjunto integralmente, a não ser Luíza Brunet e Wilza Carla.

No caso numérico, poderíamos definir a função de pertinência do conjunto B="números inteiros próximos de cinco", como:

$$\mu_B(x) = \frac{0,1}{1} + \frac{0,4}{2} + \frac{0,7}{3} + \frac{0,9}{4} + \frac{1,0}{5} + \frac{0,9}{6} + \frac{0,7}{7} + \frac{0,4}{8} + \frac{0,1}{9}$$

Ou seja, os valores de pertinência crescem na medida em que se aproxima de cinco ,e descrescem na medida em que se afasta.

Formalizando matematicamente a coisa, segue-se a definição [Zadeh(1965)]:
Definição I.1. Seja X um espaço de pontos (objetos), com um elemento genérico de X denotado por x. Um *conjunto nebuloso* A em X é caracterizado por uma *função de pertinência* $\mu_A(x)$ que associa a cada ponto em X um número real no intervalo [0,1], onde $\mu_A(x)$ representa para x o seu grau de pertinência em A.
Definição I.2. Quando se deseja exibir um elemento $x \in X$ que pertença a um conjunto nebuloso A, deseja-se saber qual é o seu valor de pertinência na vizinhança de um $\alpha \in (0,1]$. Então, define-se que o conjunto ordinário de tais elementos é o $corte - \alpha A_\alpha$ de A, tal que:

$$A_\alpha = \{x \in X, |\ \mu_A(x) \geq \alpha\}.$$

A função de pertinência de um conjunto A pode ser expresso em termos de seus cortes$-\alpha$ de acordo com a expressão:

$$\mu_A(x) = \sup_{\alpha \in (0,1]} \min\{\alpha, \mu_{A_\alpha}(x)\},$$

onde:

$$\mu_{A_\alpha}(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in A_\alpha \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Um conjunto nebuloso A pode ser decomposto em seus conjuntos de nível através da *identidade de resolução*:

$$A = \int_0^1 \alpha A_\alpha \qquad ou \qquad A = \sum_\alpha \alpha A_\alpha$$

onde αA_α é o produto de um escalar α com o conjunto A_α e $\int_0^1$ (ou Σ_α é a união dos A_α, com α variando entre 0 e 1.

A identidade de resolução pode ser vista como o resultado da combinação de elementos de A que entram em um conjunto de algum nível α.

Exemplo I.3: Seja um conjunto fuzzy A definido pela sua função de pertinência como:

$$\mu_A(x) = \frac{0,1}{2} + \frac{0,2}{3} + \frac{0,5}{4} + \frac{0,6}{5} + \frac{0,8}{6} + \frac{1,0}{7}$$

Assim, o conjunto A pode ser escrito como:

$$\begin{aligned} A = \frac{0,1}{2} + \frac{0,1}{3} + \frac{0,1}{4} + \frac{0,1}{5} + \frac{0,1}{6} & + \frac{0,1}{7} \\ + \frac{0,2}{3} + \frac{0,2}{4} + \frac{0,2}{5} + \frac{0,2}{6} & + \frac{0,2}{7} \\ + \frac{0,5}{4} + \frac{0,5}{5} + \frac{0,5}{6} & + \frac{0,5}{7} \\ + \frac{0,6}{5} + \frac{0,6}{6} & + \frac{0,6}{5} \\ + \frac{0,8}{6} & + \frac{0,8}{7} \\ & + \frac{0,0}{7} \end{aligned}$$

E os conjuntos de nível dados por:

$$\begin{aligned}
A_{0,1} &= 2+3+4+5+6+7 \\
A_{0,2} &= 3+4+5+6+7 \\
A_{0,5} &= 4+5+6+7 \\
A_{0,6} &= 5+6+7 \\
A_{0,8} &= 6+7 \\
A_{1,0} &= 7.
\end{aligned}$$

3 Operações com conjuntos nebulosos (fuzzy sets).

Torna-se necessário associar aos conjuntos nebulosos propriedades similares aos da Teoria de Conjuntos Clássica para sua posterior utilização:
Definição I.3. Um conjunto nebuloso é vazio se e somente se a sua função de pertinência é identicamente zero sobre X.
Definição I.4. Dois conjuntos nebulosos A e B são iguais (A=B), se e só se $\mu_A(x) = \mu_B(x)$ para todo x em X.
Definição I.5. O complemento de um conjunto nebuloso A em X, denotado por é definido por: $\mu\bar{A}(x) = 1 - \mu_A(x)$.
OBS.: Pode-se notar facilmente que $A \cap \bar{A} \neq \emptyset$ e portanto $A \cup \bar{A} \neq X$ (ver definições I.7 e I.8 a seguir).
Definição I6. Um conjunto nebuloso A está contido em B ($A \subseteq B$), se e só se $\mu_A(x) \leq \mu_B(x)$.
Definição I.7. A união de dois conjuntos nebulosos A e B, com suas funções de pertinência $\mu_A(x) e \mu_B(x)$ resulta um conjunto nebuloso C, cuja função de pertinência é dada por:

$$C = A \cup B \Leftrightarrow \mu_C(x) = \max\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}, \forall x \in X.$$

Obs.: Encontra-se também na literatura uma forma abreviada denotada por:

$$\mu_C(x) = \mu_A(x) \vee \mu_B(x).$$

Definição I.8. A intersecção de dois conjuntos nebulosos A e B, com suas funções de pertinência $\mu_A(x) e \mu_B(x)$ resulta um conjunto nebuloso C, cuja função de pertinência é dada por:

$$C = A \cap B \Leftrightarrow \mu_C(x) = \min\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}, \forall x \in X.$$

Obs.: Encontra-se também na literatura uma forma abreviada denotada por:

$$\mu_C(x) = \mu_A(x) \wedge \mu_B(x).$$

Definição I.9 [Kandel (1986)]. O produto de A e B denotado por AB, é definido por:

$$AB = \int_X \mu_A(x)\mu_B(x)/x.$$

Aqui vale a observação de que se A=B, então teremos o produto AA, ou A^2. Seja então um valor positivo β, então A^β é dado por:

$$A^\beta = \int_X \mu_A(x)^\beta/x.$$

Analogamente, se β é um número real não-negativo, tal que

$$\beta \sup_X \mu_A(x) \leq 1, \qquad \text{então :}$$

$$\beta A = \int_X \beta\mu_A(x)/x.$$

Desta definição, originam-se duas outras de operadores particulares denominados *concentração* e *dilatação*, definidos respectivamente por:

CON (a) $= A^2 \quad e \quad DIL(A) = A^{0.5}$

Definição I.10. A *soma limitada* de A e B denotada por $A \oplus B$, é definida por:

$$A \oplus B = \int_X 1 \wedge \mu_A(x) + \mu_B(x)/x$$

onde + é a soma aritmética.

Definição I.11. A *diferença limitada* de A e B denotada por $A \ominus B$, é definida por:

$$A \ominus B = \int_X 0 \vee \mu_A(x) - \mu_B(x)/x$$

onde $-$ é a diferença aritmética.

Definição I.12. O *quadrado-esquerdo* de A, denotado por ${}^2A$, é definido por:

$$ {}^2A = \int_V \mu_A(x)/x^2 $$

onde $V = \{x^2 | x \in X\}$. De forma mais geral:

$$ {}^\beta A = \int_V \mu_A(x)/x^\beta $$

onde $V = \{x^\beta | x \in X\}$.

Exemplo I.4: Sejam: $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$;

$$ A = 0.8/3 + 1/5 + 0.6/6, $$

$$ B = 0.7/3 + 1/4 + 0.5/6; $$

Então:

$$
\begin{aligned}
A \cup B &= 0.8/3 + 1/4 + 1/5 + 0.6/6, \\
A \cap B &= 0.7/3 + 0.5/6; \\
\bar{A} &= 1/1 + 1/2 + 0.2/3 + 1/4 + 0.4/6 + 1/7, \\
AB &= 0.56/3 + 0.3/6, \\
A^2 &= 0.64/3 + 1/5 + 0.36/6; \\
0.5A &= 0.4/3 + 0.5/5 + 0.3/6; \\
CON(B) &= 0.49/3 + 1/4 + 0.25/6, \\
DIL(B) &= 0.84/3 + 1/4 + 0.7/6, \\
A \oplus B &= 1/3 + 1/4 + 1/5 + 1/6, \\
A \ominus B &= 0.1/3 + 1/5 + 0.1/6, \\
{}^2A &= 0.8/9 + 1/25 + 0.6/36, \\
{}^3A &= 0.8/27 + 1/125 + 0.6/216.
\end{aligned}
$$

Definição I.13. Se $A_1, \ldots, A_k$ são subconjuntos nebulosos de $X_1, \ldots, X_k$ respectivamente, o *Produto Cartesiano* de $A_1, \ldots, A_k$, denotado por $A_1 \times \ldots \times A_k$ e é definido como um subconjunto nebuloso de $X_1 \times \ldots \times X_k$ cuja função de pertinência é dada por:

$$ \mu_{A_1 \times \ldots \times A_k}(x_1, \ldots, x_k) = \mu_{A_1}(x_1) \wedge \ldots \wedge \mu_{A_k}(x_k) $$

Equivalentemente:

$$A_1 \times \ldots \times A_k = \int_{X_1 \times \ldots \times X_k} \mu_{A_1}(x_1) \wedge \ldots \wedge \mu_{A_k}(x_k)/(x_1, \ldots, x_k)$$

Exemplo I.5: Sejam $X_1 = X_2 = \{2, 4, 6\}$ e

$$\begin{aligned} A_1 &= 0.5/2 + 1/4 + 0.6/6, \\ A_2 &= 1/2 + 0.6/4; \end{aligned}$$

Então:

$$A_1 \times A_2 = 0.5/(2,2) + 1/(4,2) + 0.6/(6,2) + 0.5/(2,4) + 0.6/(4,4) + 0.6/(6,4).$$

Definição I.14. Se $A_1, \ldots, A_k$ são subconjuntos nebulosos de X, e $\omega_1, \ldots, \omega_k$ são ponderações não-negativas somando uma unidade. Então a *combinação convexa* de $A_1, \ldots, A_k$ é um conjunto nebuloso A, cuja função de pertinência é dada por:

$$\mu_A(x) = \omega_1 \mu_{A_1}(x) + \ldots + \omega_k \mu_{A_k}(x) = \sum_{j=1}^{k} \omega_j \mu_{A_j}(x)$$

onde $+$ e Σ denotam soma aritmética.

O conceito de combinação convexa é utilizado na representação de *modificadores lingüísticos* [Kandel (1986)] tais como "essencialmente" e "tipicamente", os quais modificam os pesos associados aos componentes de um conjunto nebuloso.

O operador de "*fuzzificaçãoo*", definido a seguir, tem em geral o efeito de transformar um conjunto não-nebuloso em um conjunto nebuloso ou incrementar a nebulosidade de um conjunto nebuloso.

Definição I.15 [Zadeh (1975)]. O "fuzzificador" F aplicado a um subconjunto A de U resulta um subconjunto nebuloso F(A;K), o qual é expresso por:

$$F(A; K) = \int_X \mu_A(x) K(x),$$

Um "fuzzificador" F é caracterizado por seu "kernel" K(x), o qual é um conjunto nebuloso resultado da aplicação de F a um singular $1/x$:

$$K(x) = F(1/x; K);$$

$\mu_A(x)K(x)$ representa o produto de um escalar $\mu_A(x)$ e um conjunto nebuloso K(x); e é a união da família de conjuntos nebulosos $\mu_A(x)K(x), x \in$X.
Exemplo I.6: Assuma que X, e K(x) são definidos por:

$$\begin{aligned}
X &= 1+2+3+4, \\
A &= 0.8/1+0.6/2, \\
K(1) &= 1/1+0.4/2, \\
K(2) &= 1/2+0.4/1+0.4/3.
\end{aligned}$$

Então:

$$\begin{aligned}
F(A;K) &= 0.8(1/1+0.4/2)+0.6(1/2+0.4/1+0.4/3) \\
&= 0.8/1+0.32/2+0.6/2+0.24/1+0.24/3 \\
&= 0.8/1+0.6/2+0.24/3.
\end{aligned}$$

Enfim, operador de "fuzzificação" serve para através de uma definição de funções $K(x)$, operar modificações convenientes sobre um conjunto nebuloso A, de forma a lhe alterar o significado.

O operador de "fuzzificação" é muito importante na definição de limitadores lingüísticos tais como *mais ou menos*, *fracamente*, *muito*, etc. Por exemplo, de A = *positivo* é o rótulo de uma classe de números positivos e *fracamente positivo* é o rótulo de um subconjunto nebuloso na reta real cuja função de pertinência é mostrado na figura 1.1 [Zadeh (1975)]. Neste caso, *fracamente* é um "fuzzificador" que transforma *positivo* em *fracamente positivo*. No entanto, nem sempre é possível expressar o efeito de um "fuzzificador" na forma F(A;K).

Figura I.1. Funções de Pertinência de *positivo* e *fracamente positivo*.

4 Propriedades.

Cardinalidade. A cardinalidade de um conjunto não-nebuloso, nada mais é que a contagem de seus elementos. Porém, no caso dos conjuntos nebulosos, como não se tem a certeza que um elemento esteja presente no conjunto, modifica-se o conceito de cardinalidade. Em [Dubois and Prade (1980)], define-se duas cardinalidades para um conjunto nebuloso: *cardinalidade escalar* e a *cardinalidade nebulosa.*

Cardinalidade Escalar: Quando X é um conjunto finito, a cardinalidade de um conjunto nebuloso A, denotada por $|A|$, é um número real e é definida como:

$$\mid A \mid = \Sigma Count(A) = \sum_{x \in X} \mu_A(x).$$

Cardinalidade Nebulosa: Quando X não é um conjunto finito, a cardinalidade será um número nebuloso. Assim, a forma natural de se definir a cardinalidade nebulosa deve ser em função de seus cortes de nível α , ou seja:

$$\mid A \mid = \sum_{\alpha} \alpha A_{\alpha}$$

onde os cortes de nível α, A_{α} são conjuntos não-fuzzy definidos pela definição 2 [Kandel (1986)].
Exemplo I.7: Seja a classe de A = { amigos próximos de João } expresso como: A= 1,0/Pedro + 0,9/Antonio + 0,8/Paula + 0,5/Marcela
Neste caso,

$$\mid A \mid = \Sigma Count(A) = 1,0 + 0,9 + 0,8 + 0,5 = 3,2.$$

Em aplicações práticas, temos ainda um outro tipo de cardinalidade que é a *cardinalidade relativa.*
Definição I.16. Especificamente, se A e B são conjuntos nebulosos, então a cardinalidade relativa de A e B é definida por:

$$\Sigma Count(A/B) = \frac{\Sigma Count(A \cap B)}{\Sigma Count(A)}$$

que representa a proporção de elementos de A que estão em B, com a intersecção análoga à definição I.8.

Pode-se notar a semelhança da definição I.16 com a definição de probabilidade condicional de conjuntos A e B. No entanto, antes de imaginar as relações entre ambas se faz necessário analisar a seguinte desigualdade:

$$\begin{aligned} \Sigma Count(A|B) + \Sigma Count(\bar{A}|B) \quad & \geq 1 \\ & = 1, \text{se } B \text{ não é um conjunto nebuloso.} \end{aligned}$$

onde $\bar{A}$ denota o complemento do conjunto A segundo a definição I.5.

Assim sendo, agora pode-se estabelecer uma relação entre a cardinalidade relativa e a probabilidade condicional:

$$
\begin{aligned}
Prob(\bar{A}|B) &\geq 1 - Prob(A|B) \text{se } B \text{ é um conjunto nebuloso} \\
&e, \\
Prob(\bar{A}|B) &= 1 - Prob(A|B) \text{ se } B \text{ não é um conjunto nebuloso}
\end{aligned}
$$

5 Convexidade de Conjuntos Nebulosos [Dubois & Prade(1980), Kandel (1986)] Projeção e Estruturas.

A noção de convexidade pode ser generalizada para conjuntos nebulosos de um universo X, o qual é assumido ser um espaço real Euclideano N-dimensional, E^N.

Definição I.17 [Zadeh(1965)]. Um conjunto nebuloso A é *convexo* se e só se seus cortes$-\alpha$ são convexos para todo α no intervalo $(0,1]$, ou seja:

$$\forall x_1 \in X, \forall x_2 \in X, \forall \lambda \in [0,1],$$

$$\mu_A(\lambda x_1 + (1-\lambda_2)x_2) \geq \min(\mu_A(x_1), \mu_A(x_2)).$$

Vale notar que esta definição não implica que $\mu_A(x)$ é uma função convexa de x. Isto é ilustrado pela figura I.2, para N=1 [Zadeh (1965)].

Figura I.2. Conjuntos Nebulosos convexos e não-convexos em E^1.

Nota-se claramente que se A e B são convexos, então $A \cap B$ também o é.

A noção de convexidade é particularmente útil em aplicações envolvendo classificação ou reconhecimento de padrões e otimização, entre outras.

Definição I.18. Seja A um conjunto nebuloso em um espaço real Euclideano N-dimensional E^N, com função de pertinência $\mu_A(x) = \mu_A(x_1, \ldots, x_N)$. Então a *projeção* de A sobre um hiperplano $H = \{x, x_i = 0\}$ é definida como sendo o conjunto nebuloso $\mathcal{P}_H(A)$ tal que:

$$\mu_{\mathcal{P}_H(A)}(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_N) = \sup_{x_i} \mu_A(x_1, \ldots, x_N)$$

Como consequência imediata desta definição, pode-se dizer que se A é um conjunto nebuloso convexo, então a sua projeção sobre qualquer hiperplano H é também um conjunto nebuloso.

Uma importante propriedade da projeção de dois conjuntos nebulosos é expresso pela seguinte implicação:

$$\forall H, se \mathcal{P}_H(A) = \mathcal{P}_H(B), \text{então } A = B.$$

Definição I.19. Os conjuntos nebulosos podem ser equipados com estruturas algébricas. Seja * uma lei de composição sobre X. Um conjunto nebuloso A é *fechado* sobre $*$ se e só se

$$\forall x_1 \in X, \forall x_2 \in X, \mu_A(x_1 * x_2) \geq \min(\mu_A(x_1), \mu_A(x_2)).$$

Se $(X, *)$ é um grupo, um subgrupo nebuloso A de X satifaz a desigualdade acima e a igualdade $\mu_A(x^{-1}) = \mu_A(x)$, onde $x^{-1}x = e$ onde e é a *identidade do grupo.*

Se $(X, *)$ é um espaço real Euclideano e

$$x_1 * x_2 = \lambda x_1 + (1 - \lambda_2)x_2, \quad \forall \lambda \in [0, 1],$$

vê-se que um conjunto nebuloso convexo é um caso particular de um conjunto nebuloso estruturado [Dubois & Prade (1980)].

6 Conjuntos L-nebulosos.

Antes de tratar dos conjuntos L-nebulosos, faz-se necessário tratar de alguns aspectos na teoria usual de conjuntos, para se familiarizar com termos que virão a seguir. Daremos então as definições de grupo ordenado e grupo ordenado reticulado, termos estes utilizados na definição do conjunto L-nebuloso.

Definição I.20 [Andrade e Silva (1989)]. Dado grupo G, dizemos que uma relação de ordem $\leq$ sobre G é compatível com a estrutura de grupo de G, se para quaisquer a, b, c em G:

$$a \leq b \Rightarrow a + c \leq b + c.$$

Nestas condições, diremos que G é um *grupo ordenado.*

Definição I.21. Um grupo ordenado G é dito *reticulado* ou *l-grupo* se ele satisfaz a uma das condições abaixo:

$$(a) \qquad \forall a, b \in G, \exists! \inf(a, b) \in G$$
$$(b) \qquad \forall a, b \in G, \exists! \sup(a, b) \in G$$

onde inf significa a maior de todas as cotas inferiores, sup a menor de todas as cotas superiores e $\exists!$ a existência de um e apenas um.

Não é possível trabalhar com o grupo se a unicidade não for garantida. Para clarear a situação tome-se por exemplo o produto carteziano $Z \times Z$ que forma um conjunto de pares ordenados (n_1, n_2). Tomando $(n_1, n_2) < (n_1', n_2')$ tal que $n_2 < n_2'$, a existência de ínfimo é facilmente verificado, porém não é único, o que pode ser visto na figura 3 abaixo:

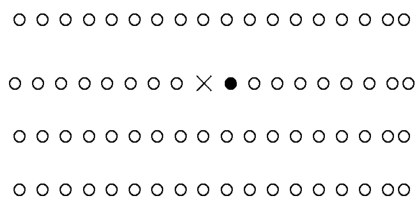

Figura 3. Representação do reticulado.

Tomando os pontos ($\circ$) e ($\bullet$) de coordenadas (n_1, n_2) e (n_1', n_2'), segundo a restrição acima, os possíveis ínfimos são quaisquer pontos de coordenadas $n_2 < n_2'$, ou seja, todos os pontos que estão na "linha inferior".

Definição I.22 [Dubois & Prade (1980)]. Seja L um conjunto. Um conjunto A é L-nebuloso se associado com uma função μ_A do universo X para L. Se L tem uma dada estrutura, do tipo reticulado ou um grupo estruturado, o conjunto de conjuntos L-nebulosos sobre X, terá essa estrutura também.

Exemplo I.8: Seja L um reticulado. A intersecção e a união de conjunto L-nebulosos pode ser induzidas da seguinte forma:

$$\forall x \in X, \mu_{A \cap B}(x) = \inf(\mu_A(x), \mu_B(x)),$$

$$\forall x \in X, \mu_{A \cup B}(x) = \sup(\mu_A(x), \mu_B(x)),$$

onde inf e sup denotam respectivamente o maior limite inferior e o menor limite superior. Nota-se que os valores de pertinência de conjuntos L-nebulosos não podem ser sempre comparados a menos que L seja linearmente ordenado. Além disso, distributividade e complementação requerem que uma estrutura mais rica seja definida.

7 Conjuntos Nebulosos do tipo m.

Definição I.23 [Dubois & Prade (1980)]. Conjuntos nebulosos do tipo m são definidos recursivamente como se segue:

- Um conjunto nebuloso do tipo 1 é um conjunto nebuloso ordinádio em X;

- Um conjunto nebuloso do tipo $m(m > 1)$ em X é um conjunto L-nebuloso, cujos valores de pertinência são conjuntos nebulosos do tipo $m - 1$ sobre [0,1].

Seja $\mathcal{L}_m(X)$ o conjunto de conjuntos nebulosos do tipo m em X. $\mathcal{L}_1(X) = \mathcal{L}(X)$. A *união*, *intersecção* e o *complemento* de conjuntos nebulosos do tipo m podem também ser recursivamente definidos pela indução da avaliação da estrutura do conjunto. Denote-se estes operadores por $\cup_m$, $\cap_m$, $^{-m}$, então:

$$\cup_1 = \cup; \mu_{A \cup_m B}(x) = \mu_A(x) \cup_{m-1} \mu_B(x), \quad m > 1.$$

Os conjuntos nebulosos do tipo 2 são os mais facilmente interpretáveis e assim são os mais utilizados. Os conjuntos nebulosos do tipo 2 são conjuntos nebulosos cujos graus de pertinência são em si também nebulosos, ou seja:

Definição I.24 [Kandel (1986)]. Um conjunto nebuloso do tipo 2, A, em um universo X, é caracterizado por uma *função* o *de pertinência nebulosa* μ_A como:

$$\mu_A : X \rightarrow [0,1]^{[0,1]}$$

onde o valor $\mu_A(x)$ é um grau nebuloso e é um conjunto nebuloso no intervalo unitário [0,1] representado por:

$$\mu_A(x) = \int f(u)/u, \quad u \in [0,1],$$

onde f é uma função de pertinência para o grau nebuloso $\mu_A(x)$ e é definido como:

$$f : [0,1] \rightarrow [0,1].$$

Os conjuntos nebulosos do tipo 2 são bastante interessantes por causa dos graus de pertinência não poderem ser obtidos precisamente nas mais variadas situações práticas.

Para mais detalhes a respeito dos conjuntos nebulosos do tipo 2, pode-se consultar [Kandel (1986) pg 25].

8 Referências.

J. C. Duarte Filho, Integrais Fuzzy, Dissertação de Mestrado, Instituto de Matemática, Estatística e Ciências da Computação, UNICAMP, 1988, 71 pp.

L. A. Zadeh, "From Circuit Theory to Systems Theory. Proc. Institute of Radio Engineers", vol.50, 1962, pp 856-865.

L. A. Zadeh, Fuzzy Sets, Information and Control, v8, 1965, pg 338-353.

A. Kandel, Fuzzy Mathematical Techinics with Applications. Addison-Wesley Publ. Co., USA, 1986.

L. A. Zadeh, "The Concepts of Linguistic Variables and its Application to Aproximate Reasoning", Part 1, 2, 3. Information Science, vols. 8 e 9, 1975, pp 199-249; 301-357; 43-80.

D. Dubois and H. Prade, Fuzzy Sets and Systems - Theory ans Applications. Academic Press, USA, 1980.

A. de Andrade e Silva, A Conjectura de Krull sobre Domínios Completamente Integralmente Fechados e Outros Exemplos. Dissertação de Mestrado, Departamento de Matemática, UFC, 1989, 55pp.